1.（上海市 2002 年 3 分）下列命题中，正确的是【　　】

（A）正多边形都是轴对称图形；

（B）正多边形一个内角的大小与边数成正比例；

（C）正多边形一个外角的大小随边数的增加而减少；

（D）边数大于 3 的正多边形的对角线长相等.

【答案】A，C。

【考点】正多边形和圆，命题与定理。

【分析】根据正多边形的性质，以及正多边形的内角和．外角和的计算方法即可求解：

A、所有的正多边形都是轴对称图形，故正确；

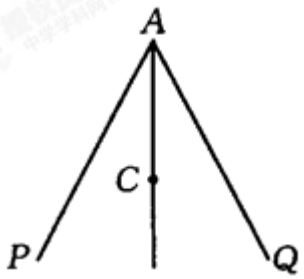
B、正多边形一个内角的大小=(n－2)×180n，不符合正比例的关系式，故错误；

C、正多边形的外角和为 360°，每个外角=$\frac{360^0}{n}$，随着 n 的增大，度数将变小，故正确；

D、正五边形的对角线就不相等，故错误。

故选 A，C。

2.（上海市 2003 年 3 分）已知 AC 平分∠PAQ，如图，点 B、B’分别在边 AP、AQ 上，如果添加一个条件，即可推出 AB＝AB’，那么该条件可以是【　　】



（A）BB’⊥AC　（B）BC＝ B’C （C）∠ACB＝∠AC B’ （D）∠ABC＝∠AB’ C

【答案】A，C，D。

【考点】全等三角形的判定和性质。

【分析】首先分析选项添加的条件，再根据判定方法判断：

添加 A 选项中条件可用 ASA 判定△ACB≌△ACB’，从而推出 AB＝AB’；

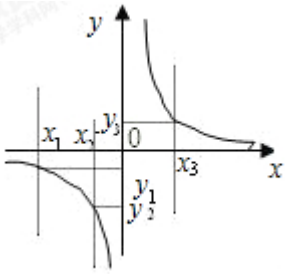
添加 B 选项中条件无法判定△ACB≌△ACB’，推不出 AB＝AB’；

添加 C 选项中条件可用 ASA 判定△ACB≌△ACB’，从而推出 AB＝AB’；

添加 D 选项以后是 AAS 判定△ACB≌△ACB’，从而推出 AB＝AB’。

故选 A，C，D。

3.（上海市 2004 年 3 分）在函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象上有三点 $A_1(x_1, y_1)$、$A_2(x_2, y_2)$、$A_3(x_3, y_3)$，已知 $x_1<x_2<0<x_3$，则下列各式中，正确的是【　　】



A. $y_1<0<y_2$　　B. $y_3<0<y_1$

C. $y_2<y_1<y_3$　　D. $y_3<y_1<y_2$

【答案】 C。

【考点】反比例函数图象上点的坐标特征，反比例函数的性质。

【分析】根据题意画出图形，再根据函数的增减性解答即可：

∵$k>0$，函数图象如图，

∴图象在第一、三象限，在每个象限内，y 随 x 的增大而减小。

∵$x_1<x_2<0<x_3$，∴$y_2<y_1<y_3$。

故选 C。

4.（上海市 2005 年 3 分）在下列命题中，真命题是【　　】

A、两个钝角三角形一定相似　　B、两个等腰三角形一定相似

C、两个直角三角形一定相似　　D、两个等边三角形一定相似

【答案】D。

【考点】相似三角形的判定；命题与定理。

【分析】根据相似三角形的判定定理对各个选项进行分析：A 不正确，不符合相似三角形的判定方法；B

不正确，没有指明相等的角或边比例，故不正确；C 不正确，没有指明另一个锐角相等或边成比例，故不正确；D 正确，三个角均相等，能通过有两个角相等的三角形相似来判定。故选 D。

5.（上海市 2006 年 4 分）在下列命题中，真命题是【　　】

A.两条对角线相等的四边形是矩形；

B.两条对角线互相垂直的四边形是菱形；

C.两条对角线互相平分的四边形是平行四边形；

D.两条对角线互相垂直且相等的四边形是正方形。

【答案】D。

【考点】正方形的判定，平行四边形的判定，菱形的判定，矩形的判定.

【分析】A、等腰梯形也满足此条件，但不是矩形；故本选项错误；B、两条对角线互相垂直平分的四边形才是菱形，故本选项错误；C、对角线相等的平行四边形是矩形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形既是矩形又是菱形的四边形是正方形，所以两条对角线垂直且相等的平行四边形是正方形，故本选项错误；D、两条对角线互相平分的四边形是平行四边形，故本选项正确。故选 D。

6.（上海市 2007 年 4 分）小明不慎把家里的圆形玻璃打碎了，其中四块碎片如图所示，为配到与原来大小一样的圆形玻璃，小明带到商店去的一块玻璃碎片应该是【　　】



A．第①块　　B．第②块

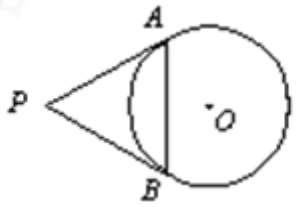
C．第③块　　D．第④块

【答案】B。

【考点】确定圆的条件。

【分析】要确定圆的大小需知道其半径．根据垂径定理知第②块可确定半径的大小。第②块出现一段完整的弧，可在这段弧上任做两条弦，作出这两条弦的垂直平分线，就交于了圆心，从而可得到半径的长。故选 B。

7.（上海市 2008 年Ⅰ组 4 分）如图，从圆 O 外一点 P 引圆 O 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B．如果 $\angle APB=60^\circ$，$PA=8$，那么弦 AB 的长是【　　】



A．4　　B．8　　C．$4\sqrt{3}$　　D．$8\sqrt{3}$

【答案】B。

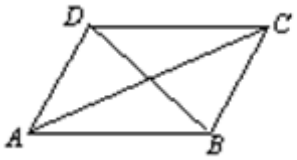
【考点】切线的性质，等边三角形和判定和性质。

【分析】∵ PA，PB 是圆 O 的两条切线，∴ $PA=PB$。

又∵ $\angle APB=60^\circ$，∴ ΔAPB 是等边三角形。

又∵ $PA=8$，∴ $AB=8$。故选 B。

8.（上海市 2008 年Ⅱ组 4 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，如果 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，那么 $\vec{a}+\vec{b}$ 等于【　　】



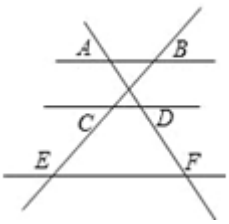
A．$\overrightarrow{BD}$　　B．$\overrightarrow{AC}$　　C．$\overrightarrow{DB}$　　D．$\overrightarrow{CA}$

【答案】B。

【考点】向量的几何意义。

【分析】根据向量的意义，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$。故选 B。

9.（上海市 2009 年 4 分）如图，已知 $AB\parallel CD\parallel EF$，那么下列结论正确的是【　　】



A．$\frac{AD}{DF}=\frac{BC}{CE}$　　B．$\frac{BC}{CE}=\frac{DF}{AD}$

C．$\frac{CD}{EF}=\frac{BC}{BE}$　　D．$\frac{CD}{EF}=\frac{AD}{AF}$

【答案】A。

【考点】平行线分线段成比例。

【分析】已知 $AB // CD // EF$，根据平行线分线段成比例定理，得 $\frac{AD}{DF}=\frac{BC}{CE}$。故选 A。

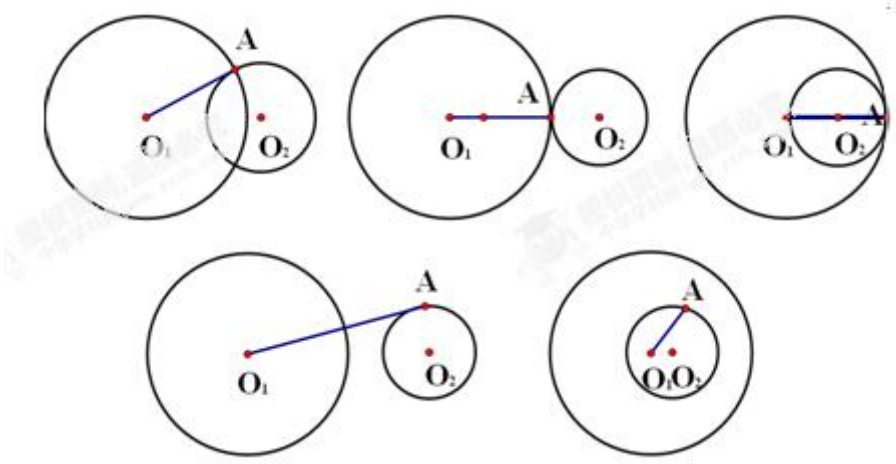
10.（上海市 2010 年 4 分）已知圆 O_1、圆 O_2 的半径不相等，圆 O_1 的半径长为 3，若圆 O_2 上的点 A 满足 $AO_1=3$，则圆 O_1 与圆 O_2 的位置关系是【　　】

A.相交或相切　　B.相切或相离　　C.相交或内含　　D.相切或内含

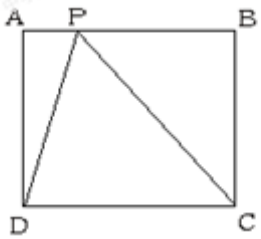
【答案】A。

【考点】圆与圆的位置关系。

【分析】根据圆与圆的五种位置关系，分类讨论：当两圆外切时，切点 A 能满足 $AO_1=3$，当两圆相交时，交点 A 能满足 $AO_1=3$，当两圆内切时，切点 A 能满足 $AO_1=3$，所以，两圆相交或相切。故选 A。



11.（上海市 2011 年 4 分）矩形 ABCD 中，AB＝8，BC＝$3\sqrt{5}$，点 P 在边 AB 上，且 BP＝3AP，如果圆 P 是以点 P 为圆心，PD 为半径的圆，那么下列判断正确的是【　　】.



(A) 点 B、C 均在圆 P 外；　　(B) 点 B 在圆 P 外、点 C 在圆 P 内；

(C) 点 B 在圆 P 内、点 C 在圆 P 外；　　(D) 点 B、C 均在圆 P 内.

【答案】C。

【考点】点与圆的位置关系，矩形的性质，勾股定理。

【分析】根据 BP=3AP 和 AB 的长度求得 AP=2，然后利用勾股定理求得圆 P 的半径 PD=$\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{2^2+\left(3\sqrt{5}\right)^2}=7$。点 B、C 到 P 点的距离分别为：PB=6，

PC=$\sqrt{PB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+\left(3\sqrt{5}\right)^2}=9$。∴由 PB＜半径 PD，PC＞半径 PD，得点 B 在圆 P 内、点 C 在外。故选 C。

12.（2012 上海市 4 分）如果两圆的半径长分别为 6 和 2，圆心距为 3，那么这两个圆的位置关系是【　　】

A．外离　　B．相切　　C．相交　　D．内含

【答案】D。

【考点】圆与圆的位置关系。

【分析】根据两圆的位置关系的判定：外切（两圆圆心距离等于两圆半径之和），内切（两圆圆心距离等于两圆半径之差），相离（两圆圆心距离大于两圆半径之和），相交（两圆圆心距离小于两圆半径之和大于两圆半径之差），内含（两圆圆心距离小于两圆半径之差）。

因此，

∵两个圆的半径分别为 6 和 2，圆心距为 3，6－2=4，4＞3，即两圆圆心距离小于两圆半径之差，

∴这两个圆的位置关系是内含。故选 D。

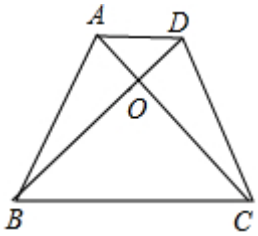
13.（2013 年上海市 4 分）在梯形 ABCD 中，AD∥BC，对角线 AC 和 BD 交于点 O，下列条件中，能判断梯形 ABCD 是等腰梯形的是【　　】

（A）∠BDC＝∠BCD　（B）∠ABC＝∠DAB　（C）∠ADB＝∠DAC　（D）∠AOB＝∠BOC

【答案】C。

【考点】等腰梯形的判定，平行的性质，等腰三角形的判定。

【分析】根据等腰梯形的判定，逐一作出判断：



A.由∠BDC＝∠BCD 只能判断△BCD 是等腰三角形，而不能判断梯形 ABCD 是等腰梯形；

B.由∠ABC＝∠DAB 和 AD∥BC，可得∠ABC＝∠DAB=90^0，是直角梯形，而不能判断梯形 ABCD 是等腰梯形；

C.由∠ADB =∠DAC，可得 AO=OD，由 AD // BC，可得∠ADB =∠DBC，∠DAC =∠ACB，从而得到∠DBC =∠ACB，所以 OB=OC，因此 AC=DB，根据对角线相等的梯形是等腰梯形可判定梯形 ABCD 是等腰梯形；

D.由∠AOB =∠BOC 只能判断梯形 ABCD 的对角线互相垂直，而不能判断梯形 ABCD 是等腰梯形。

故选 C。

1.（上海市 2002 年 2 分）已知 AD 是△ABC 的角平分线，E、F 分别是边 AB、AC 的中点，连结 DE、DF，在不再连结其他线段的前提下，要使四边形 AEDF 成为菱形，还需添加一个条件，这个条件可以是___▲___.

【答案】AB=AC 或∠B=∠C 或 AE=AF。

【考点】菱形的判定，等腰三角形的性质，三角形中位线的性质。

【分析】 根据菱形的判定定理，结合等腰三角形和三角形中位线的性质，可添加一个条件：AB=AC 或∠B=∠C 或 AE=AF。

2.（上海市 2003 年 2 分）矩形 ABCD 中，AB＝5，BC＝12。如果分别以 A、C 为圆心的两圆相切，点 D 在圆 C 内，点 B 在圆 C 外，那么圆 A 的半径 r 的取值范围是___▲___。

【答案】18<r<25 或 1<r<8。

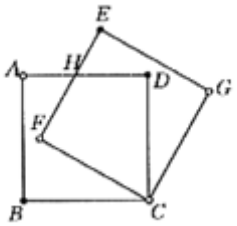
【考点】圆与圆的位置关系。

【分析】当⊙A 和⊙C 内切时，圆心距等于两圆半径之差，则 r 的取值范围是 18<r<25；

当⊙A 和⊙C 外切时，圆心距等于两圆半径之和，则 r 的取值范围是 1<r<8。

所以半径 r 的取值范围是 18<r<25 或 1<r<8。

3.（上海市 2004 年 2 分）如图所示，边长为 3 的正方形 ABCD 绕点 C 按顺时针方向旋转 30°后得到正方形 EFCG，EF 交 AD 于点 H，那么 DH 的长为___▲___。



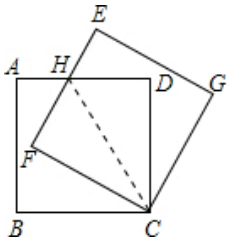
【答案】$\sqrt{3}$。

【考点】正方形的性质，旋转的性质，解直角三角形。

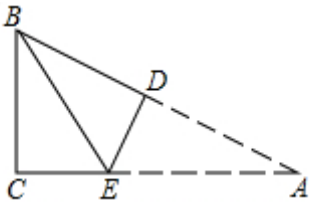
【分析】连接 CH，得：△CFH≌△CDH（HL）。

∴∠DCH=$\frac{1}{2}$∠DCF=$\frac{1}{2}$（90°－30°）=30°。

在 Rt△CDH 中，CD=3，∴DH= CD tan∠DCH=$\sqrt{3}$。



4.（上海市 2005 年 3 分）在三角形纸片 ABC 中，∠C＝90°，∠A＝30°，AC＝3，折叠该纸片，使点 A 与点 B 重合，折痕与 AB、AC 分别相交于点 D 和点 E（如图），折痕 DE 的长为___▲



【答案】1。

【考点】翻折变换（折叠问题）。

【分析】∵△ABC 中，∠C=90°，∠A=30°，AC=3，

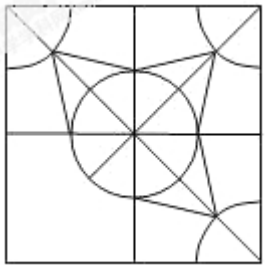
∴$AB=\frac{AC}{\cos\angle A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$。

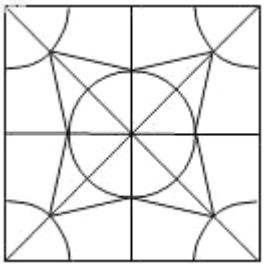
又∵△BDE 是△ADE 翻折而成，DE 为折痕，

∴DE⊥AB，$AD=BD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

∴在 Rt△ADE 中，$DE=AD\cdot\tan\angle A=\sqrt{3}\times\tan 30°=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$。

5.（上海市 2006 年 3 分）在中国的园林建筑中，很多建筑图形具有对称性。图是一个破损花窗的图形，请把它补画成中心对称图形。

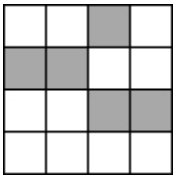


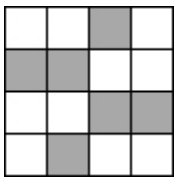
【答案】

【考点】用旋转设计图案，中心对称图形。

【分析】通过画中心对称图形来完成，找出关键点这里半径长，画弧，连接关键点即可。

6（上海市 2007 年 3 分）图是4×4正方形网格，请在其中选取一个白色的单位正方形并涂黑，使图中黑色部分是一个中心对称图形.

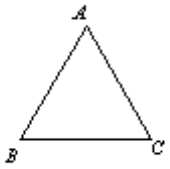


【答案】。

【考点】利用旋转设计图案，中心对称图形。

【分析】图中中间的相邻的 2 对黑色的正方形已是中心对称图形，需找到最上边的那个小正方形的中心对称图形，它原来在右上方，那么旋转 180°后将在左下方。

7.（上海市 2008 年 4 分）在$\triangle ABC$中，$AB=AC=5$，$\cos B=\frac{3}{5}$（如图）．如果圆O的半径为$\sqrt{10}$，且经过点B，C，那么线段AO的长等于___▲___.



【答案】3 或 5。

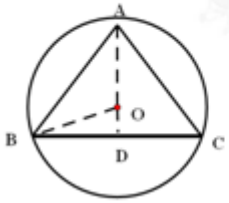
【考点】锐角三角函数，等腰三角形的性质，弦径定理，勾股定理。

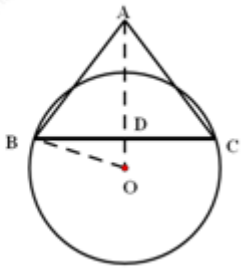
【分析】如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 交 BC 于点 D，根据锐角三角函数，等腰三角形的性质和弦径定理，由 $AB=AC=5$，$\cos B=\frac{3}{5}$ 得 $BD=DC=3$。由勾股定理，得 $AD=4$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOD$ 中，$BD=3$，$BO=\sqrt{10}$，∴由勾股定理，得 $OD=1$。

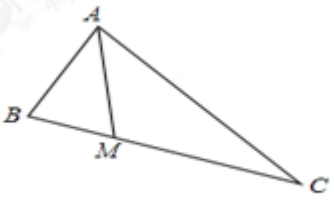
当点 O 在 BC 上方，线段 $AO=AD-OD=3$；

当点 O 在 BC 下方，线段 $AO=AD+OD=5$。





8.（上海市 2009 年 4 分）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=3$，M 为边 BC 上的点，联结 AM（如图所示）．如果将 $\triangle ABM$ 沿直线 AM 翻折后，点 B 恰好落在边 AC 的中点处，那么点 M 到 AC 的距离是 ▲ ．



【答案】2。

【考点】翻折变换（折叠问题）。

【分析】∵ $\triangle ABM$ 沿直线 AM 翻折后，点 B 恰好落在边 AC 的中点处，假设这个点是 B'。作 $MN\perp AC, MD\perp AB$，垂足分别为 M, D。

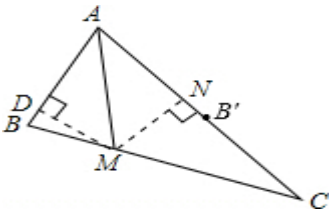
∵在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=3$，

$\therefore AB=AB'=3$，$DM=MN$，$AB'=B'C=3$，$AC=6$。

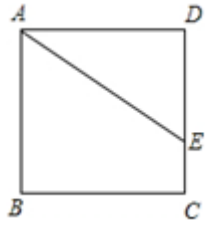
$\therefore S_{\Delta BAC}=S_{\Delta BAM}+S_{\Delta MAC}$，即$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot DM+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot MN$。

$\therefore 9=\frac{9}{2}MN$，即$MN=2$。

所以点 M 到 AC 的距离是2。



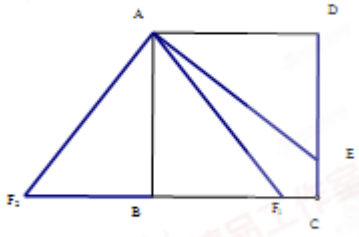
9.（上海市 2010 年 4 分）已知正方形 ABCD 中，点 E 在边 DC 上，DE = 2，EC = 1（如图所示） 把线段 AE 绕点 A 旋转，使点 E 落在直线 BC 上的点 F 处，则 F、C 两点的距离为___▲___.



【答案】1 或 5。

【考点】正方形的性质，旋转的性质，勾股定理。

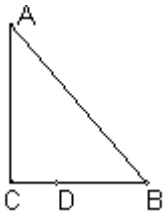
【分析】旋转两种情况如图所示：



顺时针旋转得到 F_1 点，由旋转对称的性质知 $F_1C=EC=1$。

逆时针旋转得到 F_2 点，则 $F_2B=DE=2$，$F_2C=F_2B+BC=5$。

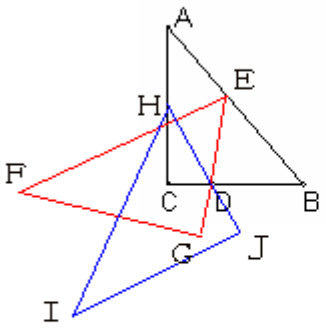
10.（上海市 2011 年 4 分）Rt△ABC 中，已知∠C＝90°，∠B＝50°，点 D 在边 BC 上，BD＝2CD（如图）. 把△ABC 绕着点 D 逆时针旋转 m（0＜m＜180）度后，如果点 B 恰好落在初始 Rt△ABC 的边上， 那么 m＝___▲___.



【答案】80°或 120°。

【考点】图形旋转的性质，等腰三角形的性质，锐角三角函数定义，特殊角三角函数值，三角形内角和定理，邻补角定义。

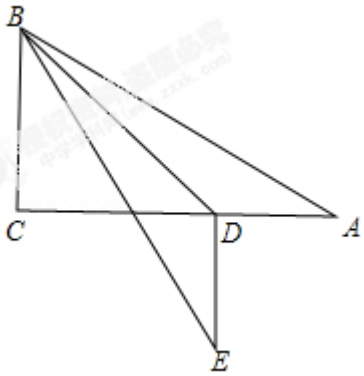
【分析】由已知，B 恰好落在初始 Rt△ABC 的边上且旋转角 0°＜m＜180°，故点 B 可落在 AB 边上和 AC 边上两种情况。



当点 B 落在 AB 边上时（如图中红线），由旋转的性质知△DBE 是等腰三角形，由∠B＝50°和等腰三角形等边对等角的性质，三角形内角和定理可得 m＝∠BDE＝80°。

当点 B 落在 AC 边上时（如图中蓝线），在 Rt△CDH 中，由已知 BD＝2CD，即 DH＝2CD，得∠CDH 的余弦等于 $\frac{1}{2}$，从而由特殊角三角函数值得∠CDH＝60°，所以根据邻补角定义得 m＝∠BDH＝120°。

11.（2012 上海市 4 分）如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，∠A=30°，BC=1，点 D 在 AC 上，将△ADB 沿直线 BD 翻折后，将点 A 落在点 E 处，如果 AD⊥ED，那么线段 DE 的长为____▲____.



【答案】$\sqrt{3}-1$。

【考点】翻折变换（折叠问题），折叠对称的性质，锐角三角函数定义，特殊角的三角函数值，三角形内角和定理，等腰三角形的判定和性质。

【分析】∵在 Rt△ABC 中，∠C=90°，∠A=30°，BC=1，

$\therefore AC=\frac{BC}{\tan\angle A}=\frac{1}{\tan 30^0}=\sqrt{3}$。

∵将△ADB 沿直线 BD 翻折后，将点 A 落在点 E 处，∴∠ADB=∠EDB，DE=AD。

∵AD⊥ED，∴∠CDE=∠ADE=90°，

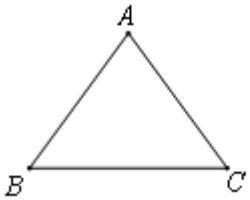
$\therefore \angle EDB=\angle ADB=\frac{360^0-90^0}{2}=135^0$。

∴∠CDB=∠EDB－∠CDE=135°－90°=45°。

∵∠C=90°，∴∠CBD=∠CDB=45°。

∴CD=BC=1。∴DE=AD=AC－CD=$\sqrt{3}-1$。

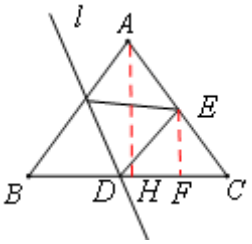
12.（2013 年上海市 4 分）如图，在△ABC 中，AB=AC，BC=8，$\tan C=\frac{3}{2}$，如果将△ABC 沿直线 l 翻折后，点 B 落在边 AC 的中点处，直线 l 与边 BC 交于点 D，那么 BD 的长为 ____▲____.



【答案】$\frac{15}{4}$。

【考点】翻折问题，等腰三角形的性质，三角形中位线定理，锐角三角函数定义，勾股定理。

【分析】如图，将△ABC 沿直线 l 翻折后，点 B 落在边 AC 的中点 E 处，过点 E 作 AH⊥BC 于点 H，EF⊥BC 于 F，则 EF 是△ACH 的中位线



∵AB=AC，BC=8，∴根据等腰三角形三线合一的性质，得 HC=BH=4。

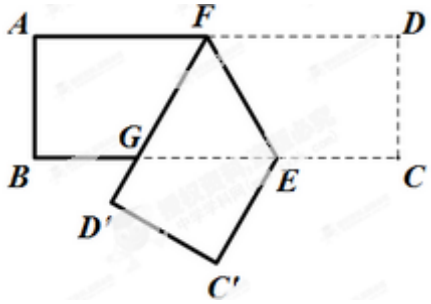
∵ $\tan C=\frac{3}{2}$，即 $\tan C=\frac{AH}{HC}=\frac{3}{2}$。∴AH=6。∴EF=3，FC=2。

设 BD=x，则根据翻折的性质，DE=BD= x，

又 $DF=BC-BD-FC=8-x-2=6-x$。

在 Rt△DEF 中，根据勾股定理，得 $x^2=(6-x)^2+3^2$，解得 $x=\frac{15}{4}$，即 BD=$\frac{15}{4}$。

13.（上海市 2014 年 4 分）如图，已知在矩形 ABCD 中，点 E 在边 BC 上，BE＝2CE，将矩形沿着过点 E 的直线翻折后，点 C、D 分别落在边 BC 下方的点 C′、D′处，且点 C′、D′、B 在同一条直线上，折痕与边 AD 交于点 F，D′F 与 BE 交于点 G．设 AB＝t，那么△EFG 的周长为_____（用含 t 的代数式表示）．



【答案】$2\sqrt{3}t$

【解析】

试题分析：如图，连接 D′B，过点 F 作 FH⊥BC 于点 H，

∵BE＝2CE，将矩形沿着过点 E 的直线翻折后，点 C、D 分别落在边 BC 下方的点 C′、D′处，且点 C′、D′、B 在同一条直线上，

∴BE=2CE=2 C′E，∠C′=90°．∴∠C′BE=30°，∠BGD′=60°．∴∠EGF=60°．

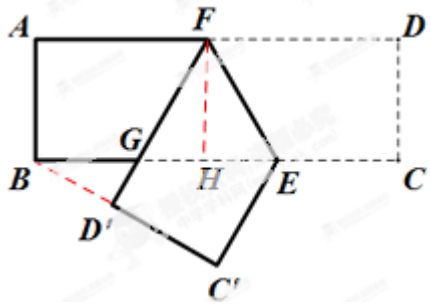
∵矩形 ABCD 中，AD∥BC，∴∠AED′=∠BGD′=60°．∴∠DFD′=120°．

由折叠对称得∠D′FE=∠EFD=60°．∴△EFG 是等边三角形．

∵矩形 ABCD 中，∠B=90°，AF∥BC，FH⊥BC，∴四边形 ABHF 是矩形．∴FH=AB=t．

∵FH 是等边三角形的垂线，∴根据三线合一的性质，∠GFH=∠EFH=30°．

∴ $FG=\frac{2\sqrt{3}}{3}t$．∴△EFG 的周长为 $2\sqrt{3}t$．

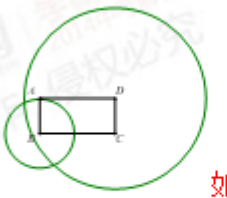


考点：1.折叠问题；2.矩形的判定和性质；3.含 30 度直角三角形的判定和性质；4.等边三角形的判定和性质.

14、（上海市 2015 年 4 分）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$BC=12$，点 A 在⊙ B 上．如果⊙ D 与⊙ B 相交，且点 B 在⊙ D 内，那么⊙ D 的半径长可以等于_____．(只需写出一个符合要求的数)

【答案】14（答案不唯一，只要大于13，小于18即可）

【解析】



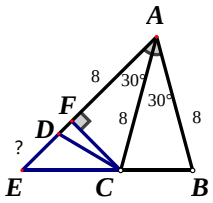
试题分析：如图，先学科网根据矩形的性质和勾股定理，求得 $BD=13$．再根据点 A 在⊙B 上，可知⊙B 的半径为 $r=5$，因 B 在⊙D 内，故⊙D 的半径 $R>13$．又因为⊙D 与⊙B 相交，圆心距 $=BD=13$，故 $R-5<13<R+5$，解得 $8<R<18$，所以 $13<R<18$，从中选一个数填写即可．

考点：1. 矩形的性质；2. 勾股定理；3. 圆相交的性质.

15、（上海市 2015 年 4 分）已知在 ΔABC 中，$AB=AC=8$，$\angle BAC=30^\circ$．将 ΔABC 绕点 A 旋转，使点 B 落在原 ΔABC 的点 C 处，此时点 C 落在点 D 处．延长线段 AD，交原 ΔABC 的边 BC 的延长线于点 E，那么线段 DE 的长等于_____．

【答案】$4\sqrt{3}-4$

【解析】



试题分析：

如图，由旋转的性质知，$AD=AC=8$，$\angle CAD=30^\circ$，过 C 作 $CF\perp AE$ 交 AE 于 F，而 $CF=\frac{1}{2}AC=4$，$AF=4\sqrt{3}$，故 $DF=8-4\sqrt{3}$．在 ΔABC 中，易求得 $\angle B=75^\circ$，故 $\angle E=45^\circ$，ΔCEF 为等腰直角三角形，$EF=CF=4$，所以 $DE=EF-DF=4-(8-4\sqrt{3})=4\sqrt{3}-4$．

考点：1. 旋转的性质；2. 含 30° 的直角三角形的性质；3. 三角形的内角和.

16.（上海市 2016 年 4 分）如图，矩形 $ABCD$ 中，$BC=2$，将矩形 $ABCD$ 绕点 D 顺时针旋转 90°，点 A、C 分别落在点 A'、C' 处，如果点 A'、C'、B 在同一条直线上，那么 $\tan\angle ABA'$ 的值为_____．

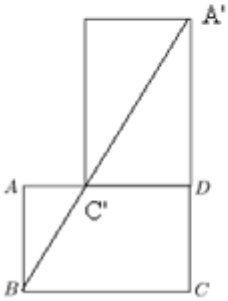


【答案】$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【解析】

试题分析：如下图，设矩形的边长 $CD=x$，由 $\frac{A'D}{C'D}=\frac{A'C}{BC}$，得 $\frac{2}{x}=\frac{2+x}{2}$，整理，得：$x^2+2x-4=0$，

解得：$x=-1\pm\sqrt{5}$，所以，$CD=\sqrt{5}-1$，所以，$tan\angle BA'C=\frac{C'D}{A'D}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．故答案为：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

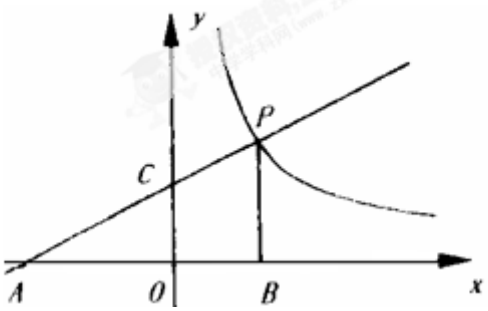


考点：三角形相似的性质，一元二次方程，三角函数.

1.（上海市 2002 年 10 分）如图，直线 y＝$\frac{1}{2}$x＋2 分别交 x、y 轴于点 A、C，P 是该直线上在第一象限内的一点，PB⊥x 轴，B 为垂足，$S_{△ABP}$＝9.

（1）求点 P 的坐标；

（2）设点 R 与点 P 的同一个反比例函数的图象上，且点 R 在直线 PB 的右侧，作 RT⊥x 轴，T 为垂足，当△BRT 与△AOC 相似时，求点 R 的坐标.



【答案】解：（1）由题意，得点 C（0，2），点 A（−4，0）。

设点 P 的坐标为（a，$\frac{1}{2}$a+2），其中 a>0。

由题意，得 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}$（a+4）（$\frac{1}{2}$a+2）=9，

解得 a=2 或 a=−10（舍去）。

而当 a=2 时，$\frac{1}{2}$a+2=3，∴点 P 的坐标为（2，3）。

（2）设反比例函数的解析式为 $y=\frac{k}{x}$。

∵点 P 在反比例函数的图象上，∴$3=\frac{k}{2}$，k=6 。

∴反比例函数的解析式为 $y=\frac{6}{x}$。

设点 R 的坐标为（b，$\frac{6}{b}$），点 T 的坐标为（b，0）其中 b>2，那么 BT=b−2，RT=$\frac{6}{b}$。

①当△RTB∽△AOC 时，$\frac{RT}{AO}=\frac{BT}{CO}$，即 $\frac{RT}{BT}=\frac{AO}{CO}=2$，

∴$\frac{\frac{6}{b}}{b-2}=2$，解得 b=3 或 b=−1（舍去）。

∴点 R 的坐标为（3，2）。

②当△RTB∽△COA 时，$\frac{RT}{CO}=\frac{BT}{AO}$，即 $\frac{RT}{BT}=\frac{CO}{AO}=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{\frac{6}{b}}{b-2}=\frac{1}{2}$ ，解得 b=1+$\sqrt{13}$ 或 b=1−$\sqrt{13}$（舍去）。

∴点 R 的坐标为（1+$\sqrt{13}$，$\frac{\sqrt{13}-1}{2}$）。

综上所述，点 R 的坐标为（3，2）或（1+$\sqrt{13}$，$\frac{\sqrt{13}-1}{2}$）。

【考点】一次函数综合题，曲线上点的坐标与方程的关系，相似三角形的判定和性质，解一元二次方程。

【分析】（1）根据点在直线上，点的坐标满足方程的性质，求出 BP，AB 的值从而可求出点 P 的坐标。

（2）设 R 点坐标为（x，y），求出反比例函数．又因为△BRT∽△AOC，利用线段比联立方程组求出 x，y 的值。

2.（上海市 2002 年 12 分）操作：将一把三角尺放在边长为 1 的正方形 ABCD 上，并使它的直角顶点 P 在对角线 AC 上滑动，直角的一边始终经过点 B，另一边与射线 DC 相交于点 Q.

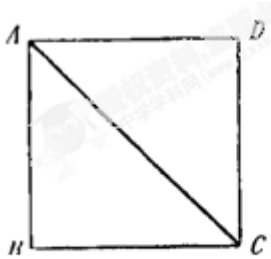


图 1

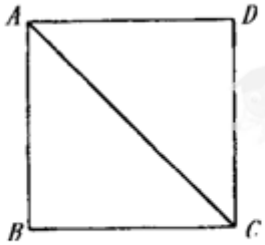


图 2

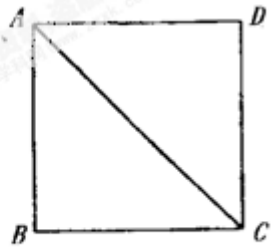


图 3

探究：设 A、P 两点间的距离为 x.

（1）当点 Q 在边 CD 上时，线段 PQ 与线段 PB 之间有怎样的大小关系？试证明你观察得到结论；

（2）当点 Q 在边 CD 上时，设四边形 PBCQ 的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数解析式，并写出函数的定义域；

（3）当点 P 在线段 AC 上滑动时，△PCQ 是否可能成为等腰三角形？如果可能，指出所有能使△PCQ 成为等腰三角形的点 Q 的位置，并求出相应的 x 的值；如果不可能，试说明理由.

（图 1、图 2、图 3 的形状大小相同，图 1 供操作、实验用，图 2 和图 3 备用）

【答案】解：（1）PQ＝PB。证明如下：

过点 P 作 MN // BC，分别交 AB 于点 M，交 CD 于点 N，那么四边形 AMND 和四边形 BCNM 都是矩形，△AMP 和△CNP 都是等腰直角三角形（如图 1）。

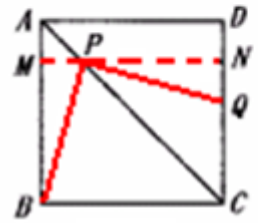


图 1

∴NP＝NC＝MB。

∵∠BPQ＝90°，∴∠QPN＋∠BPM＝90°。

而∠BPM＋∠PBM＝90°，∴∠QPN＝∠PBM。

又∵∠QNP＝∠PMB＝90°，∴△QNP≌△PMB（AAS）。

∴PQ＝PB。

（2）作 PT⊥BC，T 为垂足（如图 2），那么四边形 PTCN 为正方形。

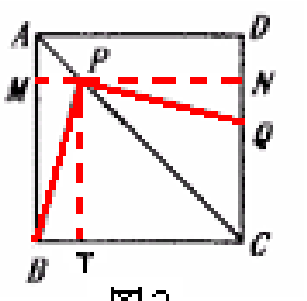


图 2

∴PT＝CB＝PN.

又∠PNQ＝∠PTB＝90°，PB＝PQ，∴△PBT≌△PQN（HL）。

$\therefore S_{\text{四边形 PBCQ}}=S_{\triangle\text{四边形 PBT}}+S_{\text{四边形 PTCQ}}=S_{\text{四边形 PTCQ}}+S_{\triangle PQN}=S_{\text{正方形 PTCN}}$

$=CN^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+1$

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+1\left(0\le x<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

（3）△PCQ 可能成为等腰三角形。

①当点 P 与点 A 重合，点 Q 与点 D 重合，这时 PQ＝QC，△PCQ 是等腰三角形，此时 x＝0。

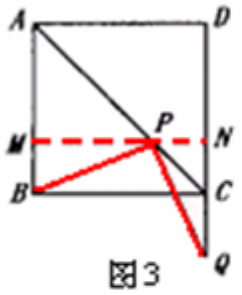


图 3

②当点 Q 在边 DC 的延长线上，且 CP＝CQ 时，△PCQ 是等腰三角形（如图 3）

此时，$QN=PM=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CP=\sqrt{2}-x$，$CN=\frac{\sqrt{2}}{2}CP=1-\frac{\sqrt{2}}{2}x$。

$\therefore CQ=QN-CN=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\sqrt{2}x-1$。

当 $\sqrt{2}-x=\sqrt{2}x-1$ 时，得 x＝1。

【考点】二次函数综合题，正方形的性质。

【分析】（1）过点 P 作 MN∥BC，分别交 AB 于点 M，交 CD 于点 N，可得四边形 AMND 和四边形 BCNM

都是矩形，△AMP 和△CNP 都是等腰三角形；根据等腰三角形的性质与角的互余关系进行代换可得△QNP≌△PMB，故 PQ=PB。

（2）由（1）的结论，根据图形可得关系 $S_{\text{四边形 PBCQ}}=S_{\triangle\text{四边形 PBT}}+S_{\text{四边形 PTCQ}}=S_{\text{四边形 PTCQ}}+S_{\triangle PQN}=S_{\text{正方形 PTCN}}$，代入数据可得解析式。

（3）分①当点 P 与点 A 重合，与②当点 Q 在边 DC 的延长线上，两种情况讨论，分别讨论答案。

3.（上海市 2003 年 10 分）已知在平面直角坐标系内，O 为坐标原点，A、B 是 x 轴正半轴上的两点，点 A 在点 B 的左侧，如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象经过点 A、B，与 y 轴相交于点 C。

（1）a 、c 的符号之间有何关系？

（2）如果线段 OC 的长度是线段 OA、OB 长度的比例中项，试证 a 、c 互为倒数；

（3）在（2）的条件下，如果 $b=-4$，AB$=4\sqrt{3}$，求 a 、c 的值。

【答案】解：（1）由图可知：当抛物线开口向下，即 $a<0$ 时，$c<0$（如图）；

当抛物线开口向上，即 $a>0$ 时，$c>0$；

因此 a 、c 同号。

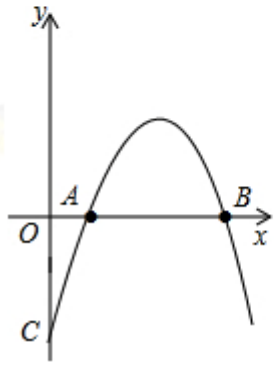
（2）设 A（m，0），B（n，0），

抛物线的解析式 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中，令 $y=0$，得：$ax^2+bx+c=0$。

$\therefore OA\cdot OB=mn=\frac{c}{a}$，$OC^2=c^2$。

$\because OA\cdot OB=OC^2$，$\therefore \frac{c}{a}=c^2$，解得 $ac=1$。

所以 a 、c 互为倒数。



（3）由题意知：$y=ax^2-4x+\frac{1}{a}$，则 m+n=$\frac{4}{a}$，mn=$\frac{1}{a^2}$。

∵AB=$4\sqrt{3}$，∴AB²=48。

∴（n－m）²=48，即（m+n）²－4mn=48，$\left(\frac{4}{a}\right)^2-4\cdot\frac{1}{a}=48$。

解得$a=\pm\frac{1}{2}$。∴$c=\pm2$。

因此a、c的值分别为：$\frac{1}{2}$、2或$-\frac{1}{2}$、－2。

【考点】二次函数综合题，一元二次方程根与系数的关系。

【分析】（1）根据A、B点的位置即可判断出当抛物线开口向下时，函数图象与y轴交于负半轴，当抛物线开口向上时，函数图象与y轴交于正半轴，即a、c同号。

（2）当CO²=OA·OB时，可用c表示出OC，用a、c表示出OA·OB，代入上式即可求得a、c是否为倒数关系。

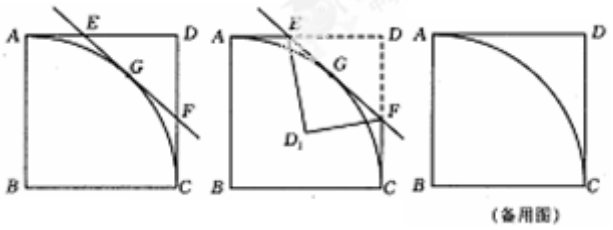
（3）沿用（2）的思路，首先将b值代入抛物线的解析式中，可依据韦达定理表示出AB的长，几何a、c的倒数关系，即可求得a、c的值。

4.（上海市2003年12分）如图，在正方形ABCD中，AB＝1，弧AC是点B为圆心，AB长为半径的圆的一段弧。点E是边AD上的任意一点（点E与点A、D不重合），过E作弧AC所在圆的切线，交边DC于点F，G为切点：

（1）当∠DEF＝45°时，求证：点G为线段EF的中点；

（2）设AE＝x，FC＝y，求y关于x的函数解析式，并写出函数的定义域；

（3）将△DEF沿直线EF翻折后得△D_1EF，如图，当EF＝$\frac{5}{6}$时，讨论△AD_1D与△ED_1F是否相似，如果相似，请加以证明；如果不相似，只要求写出结论，不要求写出理由。



【答案】解：（1）证明：∵∠DEF=45°，∴∠DFE=90°－∠DEF=45°。∴∠DFE=∠DEF。∴DE=DF。

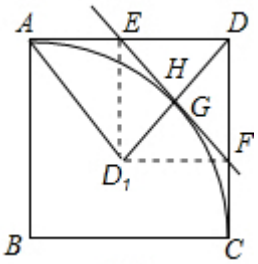
又∵AD=DC，∴AE=FC。

∵AB是圆B的半径，AD⊥AB，∴AD切圆B于点A。

同理：CD切圆B于点C。

又∵EF切圆B于点G，∴AE=EG，FC=FG。

∴EG=FG，即 G 为线段 EF 的中点。



（2）根据（1）中的线段之间的关系，得 EF=x+y，DE=1-x，DF=1－y，

根据勾股定理，得 $(x+y)^2=(1-x)^2+(1-y)^2$，$\therefore y=\frac{1-x}{1+x}$（0<x<1）。

（3）当 EF=$\frac{5}{6}$时，由（2）得 EF=EG+FG=AE+FC，即 $x+\frac{1-x}{1+x}=\frac{5}{6}$，解得 $x_1=\frac{1}{3}$ 或 $x_2=\frac{1}{2}$。

①当 AE=$\frac{1}{2}$时，$\triangle AD_1D\backsim\triangle ED_1F$，证明如下：

设直线 EF 交线段 DD_1 于点 H，由题意，得：$\triangle EDF\cong\triangle ED_1F$，$EF\perp DD_1$ 且 $DH=D_1H$。

$\because AE=\frac{1}{2}$，AD=1，$\therefore AE=ED$。$\therefore EH/\!/AD_1$，$\angle AD_1D=\angle EHD=90°$。

又$\because\angle ED_1F=\angle EDF=90°$，$\therefore\angle ED_1F=\angle AD_1D$。$\therefore\triangle ED1F\backsim\triangle AD1D$。

②当 AE=$\frac{1}{3}$时，$\triangle ED_1F$ 与$\triangle AD_1D$ 不相似。

【考点】切线的性质，正方形的性质，翻折变换（折叠问题），相似三角形的判定。

【分析】（1）根据等腰三角形的三线合一进行证明，能够熟练运用等腰直角三角形的性质和切线长定理发现 G 为线段 EF 的中点。

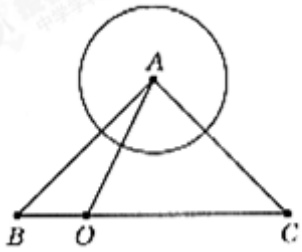
（2）根据切线长定理、正方形的性质得到有关的线段用 x，y 表示，再根据勾股定理建立函数关系式。

（3）结合（2）中的函数关系式，求得 x 的值．分两种情况分别分析，根据切线长定理找到角之间的关系，从而发现正方形，根据正方形的性质得到两个角对应相等，从而证明三角形相似。

5.（上海市 2004 年 10 分）在△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2\sqrt{2}$，圆 A 的半径为 1，如图所示，若点 O 在 BC 边上运动（与点 B、C 不重合），设 $BO=x$，△AOC 的面积为 y。

（1）求 y 关于 x 的函数解析式，并写出函数的定义域；

（2）以点 O 为圆心，BO 长为半径作圆 O，求当圆 O 与圆 A 相切时，△AOC 的面积。



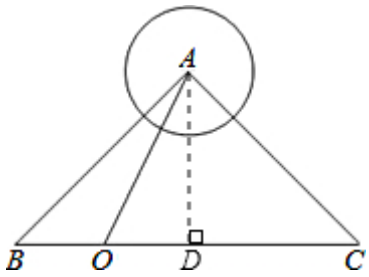
【答案】解：(1)∵在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=2\sqrt{2}$，∴ $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{8+8}=4$。

∵ $BO=x$，∴ $OC=4-x$，且 OC 边上的高为 2。

∴ $S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}(4-x)\times 2=4-x$。

∴ y 关于 x 的函数解析式为 $y=4-x(0<x<4)$。

（2）如图，过点 A 作 AD⊥BC 于点 D，当点 O 与点 D 重合时，圆 O 与圆 A 相交，不合题意；当点 O 与点 D 不重合时，在 $Rt\Delta AOD$ 中，$AO^2=AD^2+OD^2=4+|2-x|^2=x^2-4x+8$。



∵圆 A 的半径为 1，圆 O 的半径为 x，

∴①当圆 A 与圆 O 外切时，$(x+1)^2=x^2-4x+8$，解得：$x=\frac{7}{6}$。

此时△AOC 的面积 $y=4-\frac{7}{6}=\frac{17}{6}$。

②当圆 A 与圆 O 内切时，$(x-1)^2=x^2-4x+8$，解得 $x=\frac{7}{2}$。

此时△AOC 的面积 $y=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$。

∴当圆 A 与圆 O 相切时，△AOC 的面积为 $\frac{17}{6}$ 或 $\frac{1}{2}$。

【考点】勾股定理，建立函数关系式，两圆相切的性质。

【分析】（1）用 x 表示出 OC，即可建立 y 关于 x 的函数解析式。

（2）根据两圆相切的性质，分两圆外切和内切即可。

6.（上海市 2004 年 12 分）数学课上，老师出示图和下面框中条件。

如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，A 点的坐标为（1，0），点 B 在 x 轴上，且在点 A 的右侧，AB=OA，过点 A 和 B 作 x 轴的垂线，分别交二次函数 $y=x^2$ 的图象于点 C 和 D，直线 OC 交 BD 于点 M，直线 CD 交 y 轴于点 H，记点 C、D 的横坐标分别为 x_C、x_D，点 H 的纵坐标为 y_H．

同学发现两个结论：

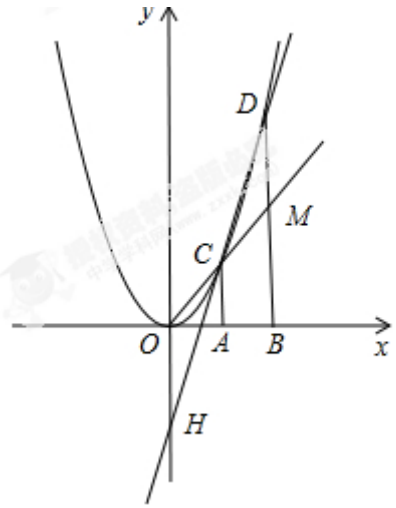
①[illegible]；

②数值相等关系：[illegible]。

（1）请你验证结论①和结论②成立；

（2）请你研究：如果将上述框中的条件“A 点坐标（1，0）”改为“A 点坐标为[illegible]”，其他条件不变，结论①是否仍成立？（请说明理由）

（3）进一步研究：如果将上述框中的条件“A 点坐标（1，0）”改为“A 点坐标为[illegible]”，又将条件“$y=x^2$”改为“[illegible]”，其他条件不变，那么 x_C、x_D和 y_H 有怎么样的数值关系？（写出结果并说明理由）



【答案】解：（1）由已知可得点 B的坐标为（2，0），点 C 的坐标为（1，1），点 D 的坐标为（2，4），由点 C 坐标为（1，1）易得直线 OC 的函数解析式为[illegible]

∴点 M 的坐标为（2，2），

∴ $S_{\Delta CMD}=1$，$S_{梯形ABMC}=\frac{3}{2}$。

∴ S_{CMD}：$S_{梯形ABMC}=2:3$，即结论①成立。

设直线 CD 的函数解析式为 $y=kx+b$

则 $\begin{cases}k+b=1\\2k+b=4\end{cases}$，得 $\begin{cases}k=3\\b=-2\end{cases}$

∴直线 CD 的函数解析式为 $y=3x-2$；

由上述可得，点 H 的坐标为（0，−2），$y_H=-2$。

∵ $x_C\cdot x_D=2$，∴ $x_C\cdot x_D=-y_H$，即结论②成立。

（2）结论①仍成立，理由如下：

∵点 A 的坐标为 $(t,\ 0)(t>0)$，则点 B 坐标为（$2t,\ 0$），从而点 C 坐标为 $(t,\ t^2)$，点 D 坐标为 $(2t,\ 4t^2)$，

设直线 OC 的函数解析式为 $y=kx$，则 $t^2=kt$，得 $k=t$。

∴直线 OC 的函数解析式为 $y=tx$。

设点 M 的坐标为（$2t$，y），

∵点 M 在直线 OC 上，∴当 $x=2t$ 时，$y=2t^2$，点 M 的坐标为（$2t,\ 2t^2$）。

∴ $S_{\Delta CMD}$：$S_{梯形ABMC}=\frac{1}{2}\cdot 2t^2\cdot t:\frac{t}{2}(t^2+2t^2)=2:3$。

∴结论①仍成立。

（3）$x_C\cdot x_D=-\frac{1}{a}y_H$，理由如下：

由题意，当二次函数的解析式为 $y=ax^2(a>0)$，且点 A 坐标为（t，0）（$t>0$）时，点 C 坐标为（t，at^2），

点 D 坐标为（$2t$，$4at^2$），设直线 CD 的函数解析式为 $y=kx+b$

则 $\begin{cases}kt+b=at^2\\2kt+b=4at^2\end{cases}$，得 $\begin{cases}k=3at\\b=-2at^2\end{cases}$

∴直线 CD 的函数解析式为 $y=3atx-2at^2$。

则点 H 的坐标为（$0,\ -2at^2$），$y_H=-2at^2$。

$\because x_C \cdot x_D = 2t^2$，$\therefore x_C \cdot x_D = -\frac{1}{a} y_H$。

【考点】二次函数综合题，曲线上点的坐标与方程的关系。

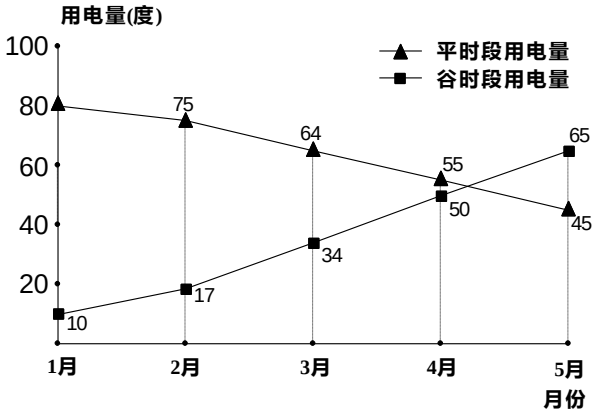
【分析】（1）可先根据 AB=OA 得出 B 点的坐标，然后根据抛物线的解析式和 A，B 的坐标得出 C，D 两点的坐标，再依据 C 点的坐标求出直线 OC 的解析式．进而可求出 M 点的坐标，然后根据 C、D 两点的坐标求出直线 CD 的解析式进而求出 D 点的坐标，然后可根据这些点的坐标进行求解即可。

（2）（3）的解法同（1）完全一样。

7.（上海市 2005 年 10 分）小明家使用的是分时电表，

按平时段（6：00—22：00）和谷时段（22：00—次日 6：00）分别计费，平时段每度电价为 0.61 元，谷时段每度电价为 0.30 元，小明将家里 2005 年 1 月至 5 月的平时段和谷时段的用电量分别用折线图表示(如图)，同时将前 4 个月的用电量和相应电费制成表格（如表）

	月用电量（度）	电费（元）
1 月	90	51.80
2 月	92	50.85
3 月	98	49.24
4 月	105	48.55
5 月		



根据上述信息，解答下列问题：

（1）计算 5 月份的用电量和相应电费，将所得结果填入表中；

（2）小明家这 5 个月的月平均用电量为_____度；

（3）小明家这 5 个月的月平均用电量呈_____趋势

（选择“上升”或“下降”）；这 5 个月每月电费呈_____趋势（选择“上升”或“下降”）；

（4）小明预计 7 月份家中用电量很大，估计 7 月份用电可达 500 度，相应电费将达 243 元，请你根据小明的估计，计算出 7 月份小明家平时段用电量和谷时段用电量.

【答案】解：（1）65+45=110，45×0.61+65×0.3=46.95。

	月用电量（度）	电费（元）
1 月	90	51.80

2 月	92	50.85
3 月	98	49.24
4 月	105	48.55
5 月	110	46.95

（2）99。

（3）小明家这 5 个月的月平均用电量呈上升趋势；这 5 个月每月电费呈下降趋势。

（4）设平时段 x 度，谷时用（500－x）度，

则 0.61x＋0.3（500－x）=243，

解得 x=300，500－x=200。

答：平时段用电 300 度，谷时用电 200 度。

【考点】统计表，折线统计图，算术平均数，一元一次方程的应用，用样本估计总体。

【分析】（1）从折线图中可看出用电度数是平时段和谷时段的和所以第一空填 65+45=110，电费则是 45×0.61+65×0.3=46.95。

（2）用平均公式求即可：（90+92+98+105+110）÷5=99。

（3）读表格获取信息。

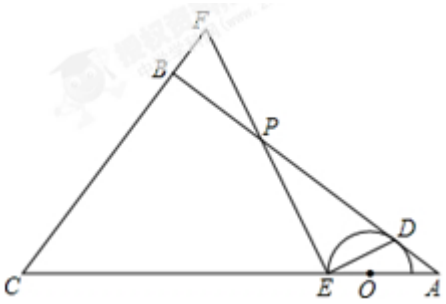
（4）设出平时段，谷时段的用电量列出方程求解即可。

8.（上海市 2005 年 12 分）在△ABC 中，∠ABC＝90°，AB＝4，BC＝3，O 是边 AC 上的一个动点，以点 O 为圆心作半圆，与边 AB 相切于点 D，交线段 OC 于点 E，作 EP⊥ED，交射线 AB 于点 P，交射线 CB 于点 F。

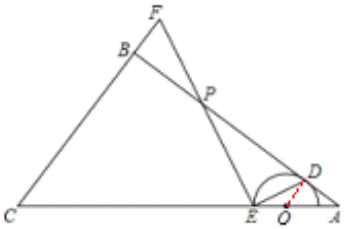
（1）如图，求证：△ADE∽△AEP；

（2）设 OA＝x，AP＝y，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域；

（3）当 BF＝1 时，求线段 AP 的长.



【答案】解：（1）证明：连接 OD，



∵AP 切半圆于 D，∴∠ODA=∠PED=90°。

又∵OD=OE，∴∠ODE=∠OED。

∴∠ADE=∠ODE+∠ODA，∠AEP=∠OED+∠PED。

∴∠ADE=∠AEP。

又∵∠A=∠A，∴△ADE∽△AEP。

（2）∵∠ABC=90°，AB=4，BC=3，∴AC=5。

∵△AOD∽△ACB，∴ $\frac{OA}{CA}=\frac{OD}{CB}=\frac{AD}{AB}$。∴OD= $\frac{3}{5}$OA，AD= $\frac{4}{5}$OA，

∵△ADE∽△AEP，∴ $\frac{AE}{AP}=\frac{AD}{AE}=\frac{DE}{EP}$。

∵AP=y，OA=x，AE=OE+OA=OD+OA= $\frac{8}{5}$OA，

∴ $\frac{AE}{AP}=\frac{AD}{AE}=\frac{\frac{4}{5}OA}{\frac{8}{5}OA}=\frac{1}{2}$，$\frac{AE}{AP}=\frac{\frac{8}{5}x}{y}=\frac{1}{2}$。

∴y 关于 x 的函数解析式为 y= $\frac{16}{5}$x （0<x≤ $\frac{25}{8}$）。

（3）分点 B 在 CF 上和在 CF 延长线上两种情况讨论：

情况 1：当点 B 在 CF 上，y= $\frac{16}{5}$x，BP=4－AP=4－ $\frac{16}{5}$x，

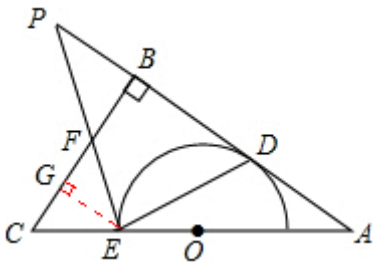
∵△PBF∽△PED，∴ $\frac{BF}{BP}=\frac{ED}{EP}$。

又∵△ADE∽△AEP，∴ $\frac{ED}{EP}=\frac{AE}{AP}$。

∴ $\frac{BF}{BP}=\frac{AE}{AP}$，即 $\frac{1}{4-\frac{16}{5}x}=\frac{\frac{8}{5}x}{\frac{16}{5}x}$。 解得：x= $\frac{5}{8}$。

∴AP= $\frac{16}{5}$x =2。

情况 2：如图，当点 B 在 CF 延长线上，



∵∠CEF=900－∠AED=900－∠P=∠CFE，

∴CE=CF=BC－BF=3－1=2。

过点 E 作 EG⊥BC，交 BC 于点 G，

则 $\frac{EG}{AB}=\frac{CG}{BC}=\frac{CE}{AC}=\frac{2}{5}$。

解得，EG=$\frac{8}{5}$，CG=$\frac{6}{5}$。

∴FG=FC－CG=2－$\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$。

又∵ $\frac{PB}{EG}=\frac{FB}{FG}$，∴PB=$\frac{1\times\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}}=2$，AP=AB+PB=4+2=6。

综上所述，当 BF＝1 时，线段 AP 的长为 2 或 6。

【考点】切线的性质；根据实际问题列一次函数关系式；相似三角形的判定与性质。

【分析】（1）证△ADE∽△AEP，两组对应角相等即可。连接 OD，根据切线的性质，得∠ODA=90°，而∠ODE=∠OED，因此∠ADE 和∠AEP 都是 90°加上一个等角，因此∠AEP=∠ADE；再加上两三角形的公共角∠A，即可证得两三角形相似。

（2）由△AOD∽△ACB，可得 OD=$\frac{3}{5}$OA，AD=$\frac{4}{5}$OA；又由△ADE∽△AEP，可得 y=$\frac{16}{5}$x 。

又∵以点 O 为圆心的半圆交线段 OC 于点 E，∴0＜AE≤AC，即 0＜$\frac{8}{5}$x≤5，0＜x≤$\frac{25}{8}$。

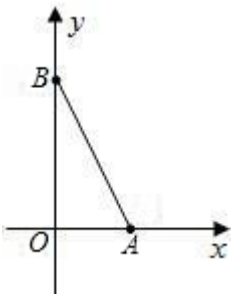
（3）分点 B 在 CF 上和在 CF 延长线上两种情况讨论即可。

9. （上海市 2006 年 12 分）如图，在直角坐标系中，O为原点．点 A在 x轴的正半轴上，点 B 在 y 轴的正半轴上，$\tan\angle OAB=2$。二次函数 $y=x^2+mx+2$ 的图象经过点 A，B，顶点为 D。

（1）求这个二次函数的解析式（5 分）。

（2）将 $\triangle OAB$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后，点 B 落到点 C 的位置。将上述二次函数图象沿 y 轴向上或向下平移后经过点 C。请直接写出点 C 的坐标和平移后所得图象的函数解析式（3 分）。

（3）设（2）中平移后所得二次函数图象与 y 轴的交点为 B_1，顶点为 D_1。点 P 在平移后的二次函数图象上，且满足 $\triangle PBB_1$ 的面积是 $\triangle PDD_1$ 面积的 2 倍，求点 P 的坐标（4 分）。



【答案】解：（1）由题意，点 B 在二次函数 $y=x^2+mx+2$ 的图象上，∴点 B 的坐标为 $(0,\ 2)$，∴ $OB=2$。

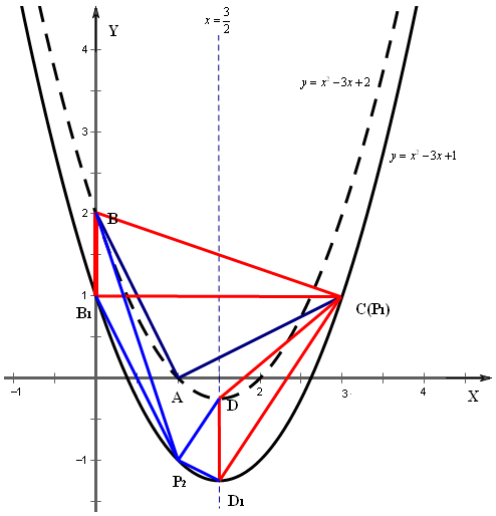
∵ $\tan\angle OAB=2$，即 $\dfrac{OB}{OA}=2$，∴ $OA=1$。∴点 A 的坐标为 $(1,\ 0)$。

又∵二次函数 $y=x^2+mx+2$ 的图象过点 A，∴ $0=1^2+m+2$，解得 $m=-3$。

∴所求二次函数的解析式为 $y=x^2-3x+2$。

（2）由题意，可得点 C 的坐标为 $(3,\ 1)$，所求二次函数解析式为 $y=x^2-3x+1$。

（3）由（2），经过平移后所得图象是原二次函数图象向下平移 1 个单位后所得的图象，那么对称轴直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 不变，且 $BB_1=DD_1=1$。



∵点 P 在平移后所得二次函数图象上，

∴设点 P 的坐标为 $\left(x,\ x^2-3x+1\right)$，

在 $\triangle PBB_1$ 和 $\triangle PDD_1$ 中，∵ $S_{\triangle PBB_1}=2S_{\triangle PDD_1}$，∴边 BB_1 上的高是边 DD_1 上的高的 2 倍。

①当点 P 在对称轴的右侧时，$x=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$，得 $x=3$，∴点 P 的坐标为 $(3,\ 1)$。

②当点 P 在对称轴的左侧，同时在 y 轴的右侧时，$x=2\left(\frac{3}{2}-x\right)$，得 $x=1$，∴点 P 的坐标为 $(1,-1)$。

③当点 P 在 y 轴的左侧时，$x<0$，又 $-x=2\left(\frac{3}{2}-x\right)$，得 $x=3>0$（舍去）。

∴所求点 P 的坐标为 $(3,\ 1)$ 或 $(1,-1)$。

【考点】二次函数综合题，曲线上点的坐标与方程的关系，三角函数定义，旋转和平移的性质。

【分析】（1）由点 B 在二次函数 $y=x^2+mx+2$ 的图象上求出点 B 的坐标而得到 $OB=2$。由 $\tan\angle OAB=2$，根据三角函数定义求出 $OA=1$ 而得到点 A 的坐标。由点 A 在二次函数 $y=x^2+mx+2$ 的图象上求出 $m=-3$，从而得到所求二次函数的解析式 $y=x^2-3x+2$。

（2）由题意，可知点 C 的横坐标等于点 B 的纵坐标，点 C 的纵坐标等于点 A 的横坐标，即 $(3,\ 1)$。由平移的性质，设平移后得到的函数关系式为 $y=x^2-3x+c$，把 $(3,1)$ 代入，得 c=1，从而得到所求二次函数的解析式 $y=x^2-3x+1$。

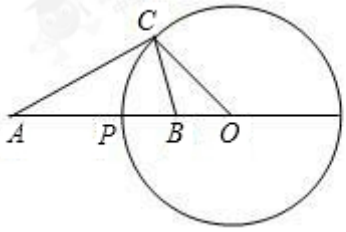
（3）由 $S_{\triangle PBB_1}=2S_{\triangle PDD_1}$ 和 $BB_1=DD_1=1$，知边 BB_1 上的高是边 DD_1 上的高的 2 倍，据此，分别讨论点 P 在对称轴的右侧，点 P 在对称轴的左侧且在 y 轴的右侧，点 P 在 y 轴的左侧三种情况即可。

10.（上海市 2006 年 14 分）已知点 P 在线段 AB 上，点 O 在线段 AB 延长线上．以点 O 为圆心，OP 为半径作圆，点 C 是圆 O 上的一点．

（1）如图，如果 $AP=2PB$，$PB=BO$．求证：$\triangle CAO\backsim\triangle BCO$（4 分）；

（2）如果 $AP=m$（m 是常数，且 $m>1$），$BP=1$，OP 是 OA，OB 的比例中项．当点 C 在圆 O 上运动时，求 $AC:BC$ 的值（结果用含 m 的式子表示）（7 分）；

（3）在（2）的条件下，讨论以 BC 为半径的圆 B 和以 CA 为半径的圆 C 的位置关系，并写出相应 m 的取值范围（3 分）。



【答案】解：（1）证明：$\because AP=2PB=PB+BO=PO$，$\therefore AO=2PO$。$\therefore\frac{AO}{PO}=\frac{PO}{BO}=2$。

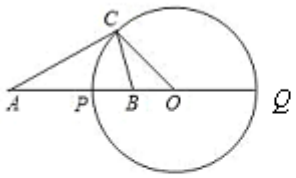
$\because PO=CO$，$\therefore\frac{AO}{CO}=\frac{CO}{BO}$。

$\because\angle COA=\angle BOC$，$\therefore\triangle CAO\backsim\triangle BCO$。

（2）设 $OP=x$，则 $OB=x-1$，$OA=x+m$。

$\because OP$ 是 OA，OB 的比例中项，

$\therefore x^2=(x-1)(x+m)$，得 $x=\frac{m}{m-1}$，即 $OP=\frac{m}{m-1}$。$\therefore OB=\frac{1}{m-1}$。



$\because OP$ 是 OA，OB 的比例中项，即 $\frac{OA}{OP}=\frac{OP}{OB}$，

$\because OP=OC$，$\therefore\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OB}$。

设圆 O 与线段 AB 的延长线相交于点 Q，当点 C 与点 P，点 Q 不重合时，

$\because \angle AOC=\angle COB$，$\therefore \triangle CAO\backsim\triangle BCO$。

$\therefore$ $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{OC}{OB}$ 即 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{OP}{OB}=m$，

当点 C 与点 P 或点 Q 重合时，可得 $\dfrac{AC}{BC}=m$。

$\therefore$当点 C 在圆 O 上运动时，$AC:BC=m$。

（3）由（2）得，$AC>BC$，且 $AC-BC=(m-1)BC(m>1)$，$AC+BC=(m+1)BC$，圆 B 和圆 C 的圆心距 $d=BC$。

显然 $BC<(m+1)BC$，$\therefore$圆 B 和圆 C 的位置关系只可能相交、内切或内含。

①当圆 B 与圆 C 相交时，$(m-1)BC<BC<(m+1)BC$，得 $0<m<2$，

$\because m>1$，$\therefore 1<m<2$。

②当圆 B 与圆 C 内切时，$(m-1)BC=BC$，得 $m=2$。

③当圆 B 与圆 C 内含时，$BC<(m-1)BC$，得 $m>2$。

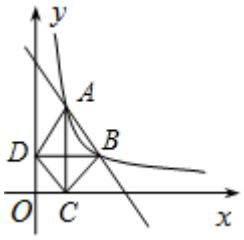
【考点】圆的性质，相似三角形的判定和性质，比例中项的性质，两圆的位置关系。

【分析】（1）由已知，可得 $\angle COA=\angle BOC$ 且 $\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{CO}{BO}$，根据三角形的判定定理得证。

（2）由 OP 是 OA，OB 的比例中项，可求出 $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OC}{OB}$ 且 $\angle AOC=\angle COB$，从而 $\triangle CAO\backsim\triangle BCO$，从而 $AC:BC=m$。

（3）根据两圆的位置关系的判定，分别求出圆 B 与圆 C 相交、内切或内含的情况。

11.（上海市 2007 年 12 分）如图，在直角坐标平面内，函数 $y=\dfrac{m}{x}$（$x>0$，m 是常数）的图象经过 $A(1,4)$，$B(a,\ b)$，其中 $a>1$．过点 A 作 x 轴垂线，垂足为 C，过点 B 作 y 轴垂线，垂足为 D，连结 AD，DC，CB．



（1）若 $\triangle ABD$ 的面积为 4，求点 B 的坐标；

（2）求证：$DC\ /\!/\ AB$；

（3）当 $AD=BC$ 时，求直线 AB 的函数解析式．

【答案】解：（1）∵函数 $y=\frac{m}{x}(x>0$，m 是常数）图象经过 $A(1,\ 4)$，∴ $m=4$。

设 BD，AC 交于点 E，据题意，可得 B 点的坐标为 $\left(a,\ \frac{4}{a}\right)$，$D$ 点的坐标为 $\left(0,\ \frac{4}{a}\right)$，

E 点的坐标为 $\left(1,\ \frac{4}{a}\right)$。

∵ $a>1$，∴ $DB=a$，$AE=4-\frac{4}{a}$。

由 $\triangle ABD$ 的面积为 4，即 $\frac{1}{2}a\left(4-\frac{4}{a}\right)=4$，得 $a=3$，∴点 B 的坐标为 $\left(3,\frac{4}{3}\right)$。

（2）证明：根据题意，点 C 的坐标为 $(1,\ 0)$，则 $DE=1$。

∵ $a>1$，易得 $EC=\frac{4}{a}$，$BE=a-1$，

∴ $\frac{BE}{DE}=\frac{a-1}{1}=a-1$，$\frac{AE}{CE}=\frac{4-\frac{4}{a}}{\frac{4}{a}}=a-1$。∴ $\frac{BE}{DE}=\frac{AE}{CE}$。

∴ $DC\parallel AB$。

（3）∵ $DC\ //\ AB$，∴当 $AD=BC$ 时，有两种情况：

①当 $AD\ //\ BC$ 时，四边形 $ADCB$ 是平行四边形，

由（2）得，$\frac{BE}{DE}=\frac{AE}{CE}=a-1$，∴ $a-1=1$，得 $a=2$。

∴点 B 的坐标是（2，2）。

设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$，把点 A，B 的坐标代入，

得 $\begin{cases}4=k+b,\\2=2k+b\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2\\b=6\end{cases}$。

∴直线 AB 的函数解析式是 $y=-2x+6$。

②当 AD 与 BC 所在直线不平行时，四边形 $ADCB$ 是等腰梯形，

则 $BD=AC$，$\therefore a=4$，$\therefore$点 B 的坐标是（4，1）。

设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$，把点 A、B 的坐标代入，

得 $\begin{cases}4=k+b,\\1=4k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1\\b=5\end{cases}$。

$\therefore$直线 AB 的函数解析式是 $y=-x+5$。

综上所述，所求直线 AB 的函数解析式是 $y=-2x+6$ 或 $y=-x+5$。

【考点】曲线上点的坐标与方程的关系，待定系数法，两直线平行的判定，平行四边形的判定和性质，等腰梯形的判定和性质。

【分析】（1）由函数 $y=\frac{m}{x}$（$x>0$，m 是常数）的图象经过 $A(1,4)$，根据点在曲线上点的坐标满足方程的关系，求出函数关系式，从而由 $\triangle ABD$ 的面积为 4 求出点 B 的坐标。

（2）由已知，求出 $\frac{BE}{DE}=\frac{AE}{CE}$，即可证得 $DC\parallel AB$。

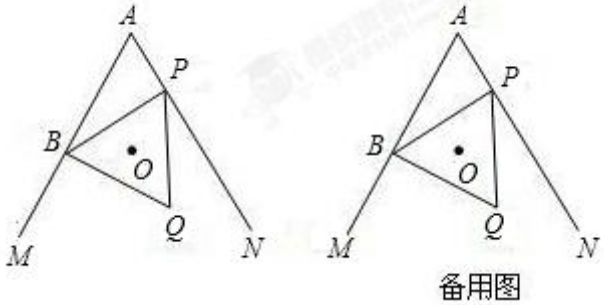
（3）分 $AD\parallel BC$ 和 AD 与 BC 所在直线不平行两种情况讨论即可。

12.（上海市 2007 年 14 分）已知：$\angle MAN=60^\circ$，点 B 在射线 AM 上，$AB=4$（如图）．P 为直线 AN 上一动点，以 BP 为边作等边三角形 BPQ（点 B，P，Q 按顺时针排列），O 是 $\triangle BPQ$ 的外心．

（1）当点 P 在射线 AN 上运动时，求证：点 O 在 $\angle MAN$ 的平分线上（4 分）；

（2）当点 P 在射线 AN 上运动（点 P 与点 A 不重合）时，AO 与 BP 交于点 C，设 $AP=x$，$AC\cdot AO=y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出函数的定义域（5 分）；

（3）若点 D 在射线 AN 上，$AD=2$，圆 I 为 $\triangle ABD$ 的内切圆．当 $\triangle BPQ$ 的边 BP 或 BQ 与圆 I 相切时，请直接写出点 A 与点 O 的距离（5 分）．



备用图

【答案】解：（1）证明：如图，连结 OB，OP，

∵ O 是等边三角形 BPQ 的外心，

∴ $OB=OP$，圆心角 $\angle BOP=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$。

当 OB 不垂直于 AM 时，作 $OH\perp AM$，$OT\perp AN$，垂足分别为 H，T。

由 $\angle HOT+\angle A+\angle AHO+\angle ATO=360^\circ$，且 $\angle A=60^\circ$，$\angle AHO=\angle ATO=90^\circ$，

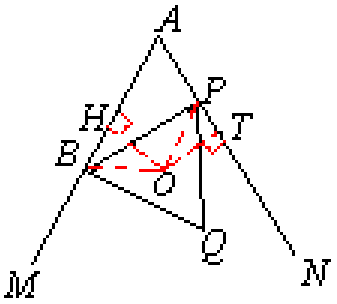
∴ $\angle HOT=120^\circ$。∴ $\angle BOH=\angle POT$。∴ $\mathrm{Rt}\triangle BOH\cong\mathrm{Rt}\triangle POT$。

∴ $OH=OT$。∴点 O 在 $\angle MAN$ 的平分线上。

当 $OB\perp AM$ 时，$\angle APO=360^\circ-\angle A-\angle BOP-\angle OBA=90^\circ$，即 $OP\perp AN$，

∴点 O 在 $\angle MAN$ 的平分线上。

综上所述，当点 P 在射线 AN 上运动时，点 O 在 $\angle MAN$ 的平分线上。



（2）如图，∵ AO 平分 $\angle MAN$，且 $\angle MAN=60^\circ$，

∴ $\angle BAO=\angle PAO=30^\circ$。

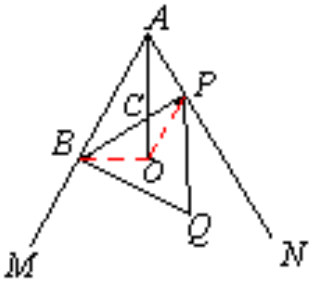
由（1）知，$OB=OP$，$\angle BOP=120^\circ$，

∴ $\angle CBO=30^\circ$，∴ $\angle CBO=\angle PAC$。

∵ $\angle BCO=\angle PCA$，∴ $\angle AOB=\angle APC$。

∴ $\triangle ABO\backsim\triangle ACP$。∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{AO}{AP}$。∴ $AC\square AO=AB\square AP$。

∴ $y=4x$。定义域为：$x>0$。



（3）①如图 1，当 BP 与圆 I 相切时，$AO=2\sqrt{3}$；

②如图 2，当 BP 与圆 I 相切时，$AO=\frac{4}{3}\sqrt{3}$；

③如图 3，当 BQ 与圆 I 相切时，$AO=0$。

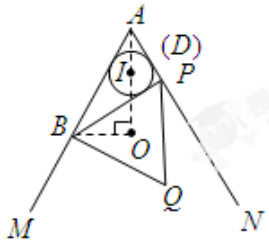


图 1

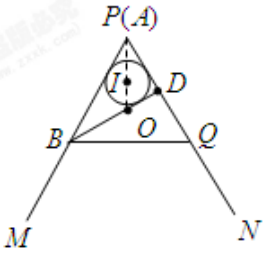


图 2

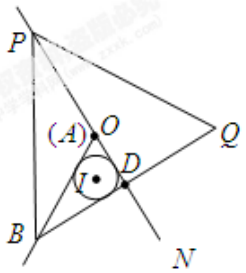


图 3

【考点】等边三角形的性质，全等三角形的判定和性质，点在角平分线上的判定，相似三角形的判定和性质，直线和圆相切的性质。

【分析】（1）分 OB 不垂直于 AM 和 $OB\perp AM$ 两种情况分别证明。

（2）由已知，证出 $\triangle ABO\backsim\triangle ACP$，根据相似三角形的性质即可得出 $\frac{AB}{AC}=\frac{AO}{AP}$，从而得到 y 关于 x 的函数解析式。由于点 P 在射线 AN 上运动（点 P 与点 A 不重合），所以函数的定义域为 $x>0$。

（3）分点 P 在射线 AN 上运动（点 P 与点 A 不重合），点 P 与点 A 不重合，点 P 在射线 AN 的反向上运动（点 P 与点 A 不重合）三种情况分别讨论：

①当点 P 在射线 AN 上运动（点 P 与点 A 不重合）时，如图 1，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，$\angle BAO=30^0$，$AB=4$，

$\therefore$ 点 A 与点 O 的距离 $AO=AB\sin\angle BAO=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$。

②当点 P 与点 A 重合时，如图 2，$\angle BAO=30^0$，$\frac{1}{2}AB=2$，$\therefore$ 点 A 与点 O 的距离

$AO=\frac{1}{2}AB\div\sin\angle BAO=\frac{1}{2}\times4\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$。

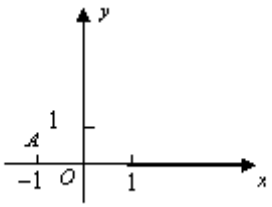
③点 P 在射线 AN 的反向上运动（点 P 与点 A 不重合）时，如图 3，点 O 与点 A 重合，$\therefore$ 点 A 与点 O 的距

离 $AO=0$。

13.（上海市 2008 年 12 分）如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点．二次函数 $y=-x^2+bx+3$ 的图像经过点 $A(-1,0)$，顶点为 B．

（1）求这个二次函数的解析式，并写出顶点 B 的坐标（5 分）；

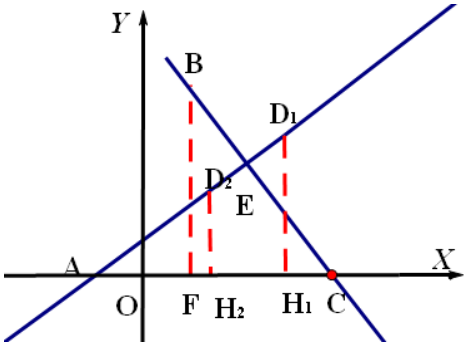
（2）如果点 C 的坐标为 $(4,0)$，$AE\perp BC$，垂足为点 E，点 D 在直线 AE 上，$DE=1$，求点 D 的坐标（7 分）．



【答案】解：（1）∵二次函数 $y=-x^2+bx+3$ 的图像经过点 $A(-1,\ 0)$，

∴ $0=-1-b+3$，得 $b=2$。所求二次函数的解析式为 $y=-x^2+2x+3$。

则这个二次函数图像顶点 B 的坐标为 $(1,\ 4)$。



（2）过点 B 作 $BF\perp x$ 轴，垂足为点 F。

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中，$BF=4$，$CF=3$，$BC=5$，

∴ $\sin\angle BCF=\frac{4}{5}$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\sin\angle ACE=\frac{AE}{AC}$，又 $AC=5$，可得 $\frac{AE}{5}=\frac{4}{5}$。∴ $AE=4$。

过点 D 作 $DH\perp x$ 轴，垂足为点 H。由题意知，点 H 在点 A 的右侧，

易证 $\triangle ADH\backsim\triangle ACE$．∴ $\frac{AH}{AE}=\frac{DH}{CE}=\frac{AD}{AC}$。

其中 $CE=3$，$AE=4$。设点 D 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $AH=x+1$，$DH=y$。

①若点 D 在 AE 的延长线上，则 $AD=5$，得 $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{3}=\frac{5}{5}$，

$\therefore\ x=3$，$y=3$。$\therefore$点 D 的坐标为 $(3,\ 3)$。

②若点 D 在线段 AE 上，则 $AD=3$，得 $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{3}=\frac{3}{5}$，

$\therefore\ x=\frac{7}{5}$，$y=\frac{9}{5}$。$\therefore$点 D 的坐标为 $\left(\frac{7}{5},\ \frac{9}{5}\right)$。

综上所述，点 D 的坐标为 $(3,\ 3)$ 或 $\left(\frac{7}{5},\ \frac{9}{5}\right)$。

【考点】曲线上点的坐标与方程的关系，二次函数的顶点坐标，锐角三角函数定义，相似三角形的判定和性质。

【分析】（1）根据点在曲线上，点的坐标满足方程的关系，由二次函数 $y=-x^2+bx+3$ 的图像经过点 $A(-1,0)$，可求得 $b=2$，从而得到二次函数的解析式。把二次函数的解析式化为顶点式 $y=-(x-1)^2+4$，可得这个二次函数图像顶点 B 的坐标为 $(1,\ 4)$。

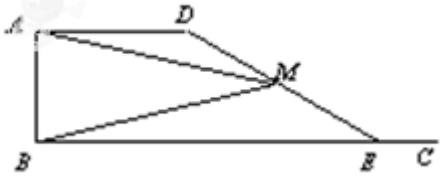
（2）过点 B 作 $BF\perp x$ 轴，垂足为点 F，过点 D 作 $DH\perp x$ 轴，垂足为点 H。分点 D 在 AE 的延长线上和点 D 在线段 AE 上两种情况分别求出点 D 的坐标为 $(3,\ 3)$ 或 $\left(\frac{7}{5},\ \frac{9}{5}\right)$。

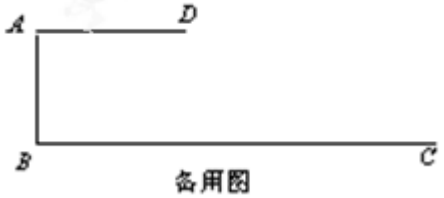
14.（上海市 2008 年 14 分）已知 $AB=2$，$AD=4$，$\angle DAB=90^\circ$，$AD\parallel BC$（如图）．E 是射线 BC 上的动点（点 E 与点 B 不重合），M 是线段 DE 的中点．

（1）设 $BE=x$，$\triangle ABM$ 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出函数的定义域（5 分）；

（2）如果以线段 AB 为直径的圆与以线段 DE 为直径的圆外切，求线段 BE 的长（4 分）；

（3）联结 BD，交线段 AM 于点 N，如果以 A，N，D 为顶点的三角形与 $\triangle BME$ 相似，求线段 BE 的长（5 分）．





备用图

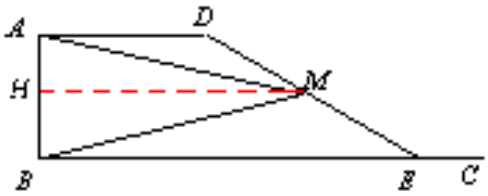
【答案】解：（1）取 AB 中点 H，联结 MH，

∵ M 为 DE 的中点，

∴ $MH \parallel BE$， $MH=\frac{1}{2}(BE+AD)$。

又∵ $AB \perp BE$， ∴ $MH \perp AB$。

∴ $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot MH$，得 $y=\frac{1}{2}x+2(x>0)$。



（2）由已知得 $DE=\sqrt{(x-4)^2+2^2}$。

∵以线段 AB 为直径的圆与以线段 DE 为直径的圆外切，

∴ $MH=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}DE$，即 $\frac{1}{2}(x+4)=\frac{1}{2}\left[2+\sqrt{(4-x)^2+2^2}\right]$。

解得 $x=\frac{4}{3}$，即线段 BE 的长为 $\frac{4}{3}$。

（3）由已知，以 A，N，D 为顶点的三角形与 $\triangle BME$ 相似，又易证得 $\angle DAM=\angle EBM$。

由此可知，另一对对应角相等有两种情况：① $\angle ADN=\angle BEM$；② $\angle ADB=\angle BME$。

①当 $\angle ADN=\angle BEM$ 时，∵ $AD \parallel BE$，∴ $\angle ADN=\angle DBE$。∴ $\angle DBE=\angle BEM$。

∴ $DB=DE$，易得 $BE=2AD$．得 $BE=8$

②当 $\angle ADB=\angle BME$ 时，∵ $AD \parallel BE$，∴ $\angle ADB=\angle DBE$。∴ $\angle DBE=\angle BME$。

又 $\angle BED=\angle MEB$，∴ $\triangle BED \backsim \triangle MEB$。

∴ $\frac{DE}{BE}=\frac{BE}{EM}$，即 $BE^2=EM\cdot DE$，得 $x^2=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(x-4)^2}\cdot\sqrt{2^2+(x-4)^2}$，

解得 $x_1=2$，$x_2=-10$（舍去）．即线段 BE 的长为 2。

综上所述，所求线段 BE 的长为 8 或 2。

【考点】梯形的中位线性质，勾股定理，两圆外切的性质，相似三角形的判定和性质。

【分析】（1）根据梯形的中位线性质，可得 $MH=\frac{1}{2}(BE+AD)=\frac{1}{2}(x+4)$，由 $\angle DAB=90^\circ$ 可知 MH 是 $\triangle ABM$ 边 AB 上的高。因此，$y=S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot MH=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}(x+4)=\frac{1}{2}x+2$。由于 E 是射线 BC 上的动点（点 E 与点 B 不重合），从而 $x>0$。

（2）根据两圆外切，圆心距等于两半径之和，列方程 $\frac{1}{2}(x+4)=\frac{1}{2}\left[2+\sqrt{(4-x)^2+2^2}\right]$ 解之即可。

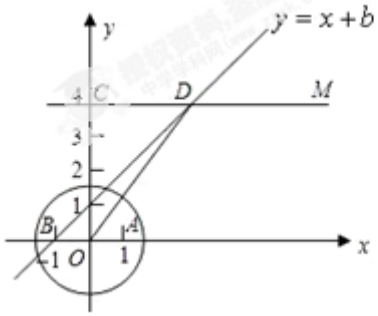
（3）根据相似三角形的判定和性质，由于 $\angle DAM=\angle EBM$ 。从而只要 $\angle ADN=\angle BEM$ 或 $\angle ADB=\angle BME$ 即可。因此分此两情况讨论即可。

15.（上海市 2009 年 12 分）在直角坐标平面内，O 为原点，点 A 的坐标为 $(1,0)$，点 C 的坐标为 $(0,4)$，直线 CM // x 轴（如图所示）．点 B 与点 A 关于原点对称，直线 $y=x+b$（b 为常数）经过点 B，且与直线 CM 相交于点 D，联结 OD .

（1）求 b 的值和点 D 的坐标；

（2）设点 P 在 x 轴的正半轴上，若 $\triangle POD$ 是等腰三角形，求点 P 的坐标；

（3）在（2）的条件下，如果以 PD 为半径的圆 P 与圆 O 外切，求圆 O 的半径．



【答案】解：（1）∵点 A 的坐标为 $(1,0)$，点 B 与点 A 关于原点对称，∴点 B（—1，0）。

∵ 点 B 在直线 $y=x+b$ 上，∴将点 B（—1，0），代入 $y=x+b$ 得到 b=1 。

∴直线 BD： $y=x+1$ 。

将 $y=4$ 代入 $y=x+1$，得 x=3 。∴ 点 D（3，4）。

（2）∵点 D（3，4），∴ OD=5 。

∵点 P 在 x 轴的正半轴上， $\triangle POD$ 是等腰三角形，

∴ $\triangle POD$ 是等腰三角形的情况有 $OP=OD$ 、 $OD=PD$ 和 $PO=PD$ 。

情况 1： $OP=OD=5$，则点 P（5，0）。

情况 2： $OD=PD=5$ ，由点 D（3，4）得 $PO=2\times3=6$， 则点 P（6，0）。

情况 3： $PO=PD$ ， 设 $P(x,\ 0)$，由 D（3，4）

根据勾股定理得 $x=\sqrt{(x-3)^2+4^2}$，解得 $x=\dfrac{25}{6}$ 。

则点 $P\left(\dfrac{25}{6},\ 0\right)$ 。

综上所述，若△POD是等腰三角形，点P的坐标为（5，0），（6，0），$\left(\frac{25}{6},0\right)$。

（3）设圆O的半径为r，

情况1：$OP=OD=5$时，由P，D两点坐标得，$PD=\sqrt{(5-3)^2+4^2}=2\sqrt{5}$。

∵以PD为半径的圆P与圆O外切，∴圆心距$OP=5=r+2\sqrt{5}$。∴$r=5-2\sqrt{5}$。

情况2：$OD=PD=5$时，$PO=6$由P，D两点坐标得，$PD=\sqrt{(6-3)^2+4^2}=5$。

∵以PD为半径的圆P与圆O外切，∴圆心距$OP=6=r+5$。∴$r=1$。

情况3：$PO=PD=\frac{25}{6}$时，不存在圆O，使以PD为半径的圆P与圆O外切。

【考点】关于原点对称的点的性质，直线上点的坐标与方程的关系，等腰三角形的性质，勾股定理，两圆外切的性质。

【分析】（1）由关于原点对称的点的性质求出点B的坐标，根据点在直线上，点的坐标满足方程的关系求出b的值和点D的坐标。

（2）根据等腰三角形的性质，分$OP=OD$、$OD=PD$和$PO=PD$三种情况讨论即可。

（3）根据两圆外切，圆心距等于两圆半径之和的性质，结合（2）的三种情况分别讨论即可。

16.（上海市2009年14分）已知$\angle ABC=90°$，$AB=2$，$BC=3$，$AD\parallel BC$，P为线段BD上的动点，点Q在射线AB上，且满足$\frac{PQ}{PC}=\frac{AD}{AB}$（如图1所示）.

（1）当$AD=2$，且点Q与点B重合时（如图2所示），求线段PC的长（4分）；

（2）在图1中，联结AP．当$AD=\frac{3}{2}$，且点Q在线段AB上时，设点B、Q之间的距离为x，$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle PBC}}=y$，其中$S_{\triangle APQ}$表示△$APQ$的面积，$S_{\triangle PBC}$表示△$PBC$的面积，求$y$关于$x$的函数解析式，并写出函数定义域（5分）；

（3）当$AD<AB$，且点Q在线段AB的延长线上时（如图3所示），求$\angle QPC$的大小（5分）.

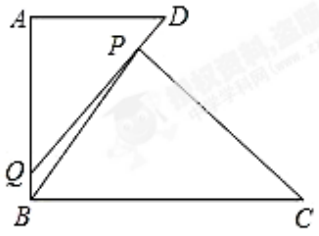


图 1

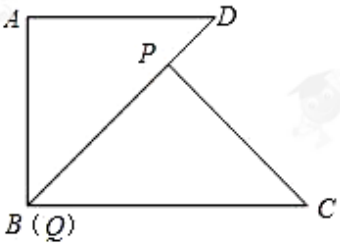


图 2

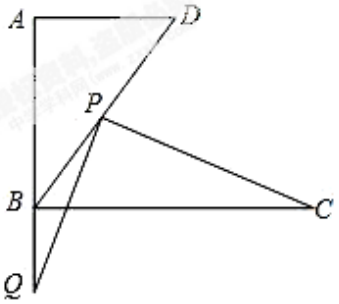


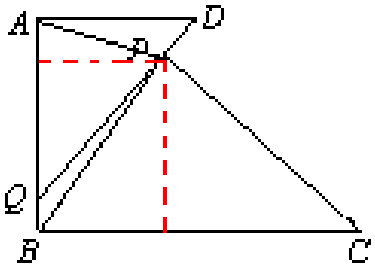
图 3

【答案】解：（1）∵ $\angle ABC=90°$，$AB=AD=2$，$AD\parallel BC$，∴ ΔABD 为等腰直角三角形。

∴ $\angle ABD=45°$。 ∴ $\angle PBC=45°$。

∵ $\dfrac{PQ}{PC}=\dfrac{AD}{AB}=1$， ∴ ΔPQC 为等腰直角三角形。

又∵ $BC=3$，∴ $PC=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$。



（2）如图：添加辅助线 AP，根据题意，两个三角形的面积可以分别表示成 $S_{\triangle APQ}$，$S_{\triangle PBC}$，高分别是 H,h，

则 $S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot(2-x)\cdot H=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot H-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot(2-h)$，

化简，得 $H=\dfrac{3}{4}h$。

∴ $S_{\triangle APQ}=\dfrac{3}{8}(2-x)h$。

又 $S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot h=\dfrac{3}{2}h$，∴由 $\dfrac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle PBC}}=y$ 得 $y=\dfrac{\frac{3}{8}(2-x)h}{\frac{3}{2}h}=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$。

∴ y 关于 x 的函数解析式为 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}\left(0\le x\le\dfrac{7}{8}\right)$。

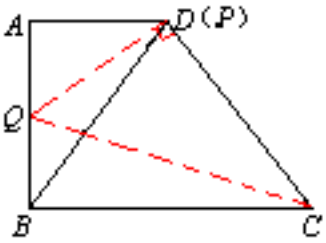
(3)假设 PQ 不垂直 PC，则可以作一条直线 PQ' 垂直于 PC，与 AB 交于 Q' 点，则：B，Q'，P，C 四点共圆，由圆周角定理，以及相似三角形的性质得：$\dfrac{PQ'}{PC}=\dfrac{AD}{AB}$。又由于 $\dfrac{PQ}{PC}=\dfrac{AD}{AB}$ 所以，点 Q' 与点 Q 重合，所以 $\angle QPC=90^0$ 。

【考点】等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理，四点共圆，圆周角定理，相似三角形的判定和性质。

【分析】（1）由等腰直角三角形的判定和性质和勾股定理可求出线段 PC 的长。

（2）由 $S_{\triangle APQ}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle PQB}-S_{\triangle APQ}PAD$ 求出 $\triangle APQ$ 和 $\triangle PBC$ 两高之间的关系 $H=\frac{3}{4}h$，即可由 $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle PBC}}=y$ 列出 y 关于 x 的函数解析式 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$。

定义域：当 PC 垂直 BD 时，这时 $x=0$，$\therefore x\geq 0$。



当点 P 运动到与 D 点重合时，x 的取值就是最大值，连接 DC，作 $QD\perp DC$，由已知条件得：B，Q，$D(P)$，C 四点共圆，则由圆周角定理可以推知：$\Delta QDC\backsim\Delta ABD$，$\therefore\frac{QD}{DC}=\frac{AD}{AB}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$。

令 $QD=3m$，$DC=4m$，则由勾股定理得 $QC=5m$。

在 $Rt\Delta AQD$ 中，$AQ^2+AD^2=QD^2$，即 $(2-x)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=(3m)^2$。

在 $Rt\Delta QBC$ 中，$QB^2+BC^2=QC^2$，即 $x^2+3^2=(5m)^2$。

消去 m，整理得：$64x^2-400x+301=0$，$(8x-7)(8x-43)=0$，

得 $x_1=\frac{7}{8}$，$x_2=\frac{43}{8}>2$（舍去）。

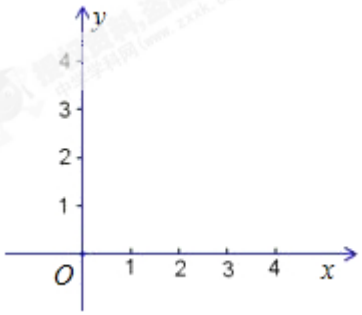
所以函数 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ 的定义域为 $0\leq x\leq\frac{7}{8}$。

(3)作出一条直线 PQ' 垂直于 PC，与 AB 交于 Q' 点，证明其与 Q 点重合即可。

17.（上海市 2010 年 12 分）如图，已知平面直角坐标系 xOy，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 过点 A(4,0)、B(1,3)．

（1）求该抛物线的表达式，并写出该抛物线的对称轴和顶点坐标；

（2）记该抛物线的对称轴为直线 l，设抛物线上的点 P(m,n)在第四象限，点 P 关于直线 l 的对称点为 E，点 E 关于 y 轴的对称点为 F，若四边形 OAPF 的面积为 20，求 m、n 的值．



【答案】解：（1）将 A(4,0)、B(1,3)两点坐标代入抛物线的方程得：

$\begin{cases}-4^2+4b+c=0\\-1^2+b+c=3\end{cases}$，解之得：b=4，c=0

∴抛物线的表达式为：$y=-x^2+4x$。

将抛物线的表达式配方得：$y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$

∴该抛物线的对称轴为 x=2，顶点坐标为（2，4）。

（2）点 p（m，n）关于直线 x=2 的对称点为点 E（4－m，n），点 E 关于 y 轴的对称点为点 F（4－m,－n）。则四边形 OAPF 可以分为：△OFA 与△OAP，

$\therefore S_{OFAP}=S_{\Delta OFA}+S_{\Delta OPA}=$ $S_{\Delta OFA}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot|n|+$ $S_{\Delta OPA}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot|n|=$ $4|n|=20$

∴$|n|=5$。

∵点 P 为第四象限的点，∴n<0，∴n= －5。

代入抛物线方程得 m=5。

【考点】曲线上点的坐标与方程的关系，抛物线的性质，轴对称的性质。

【分析】（1）根据点在曲线上，点的坐标满足方程的关系，将点 A、B 的坐标代入函数关系式即可求出 b=4，c=0，得到抛物线的表达式。将表达式化为顶点式即可得到该抛物线的对称轴和顶点坐标。

（2）根据轴对称的性质可得到点 E 和 F 的坐标，由已知四边形 OAPF 的面积为 20，列式求出 n，

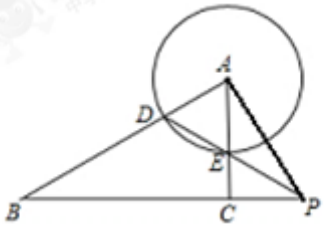
代入抛物线方程求得 m。

18.（上海市 2010 年 14 分）如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°.半径为 1 的圆 A 与边 AB 相交于点 D，与边 AC 相交于点 E，连结 DE 并延长，与线段 BC 的延长线交于点 P.

（1）当∠B＝30°时，连结 AP，若△AEP 与△BDP 相似，求 CE 的长；

（2）若 CE=2，BD=BC，求∠BPD 的正切值；

（3）若 $\tan\angle BPD=\frac{1}{3}$，设 CE=x，△ABC 的周长为 y，求 y 关于 x 的函数关系式.



【答案】解：（1）∵∠B＝30°，∠ACB＝90°，∴∠BAC＝60°。

∵AD=AE，∴∠AED＝60°＝∠CEP。∴∠EPC＝30°。

∴△BDP 为等腰三角形。

∵△AEP∽△BDP，∴∠EAP=∠EPA=∠DBP=∠DPB=30°。

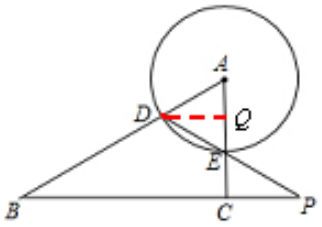
∴AE=EP=1.

∴在 Rt△ECP 中，EC=$\frac{1}{2}$EP=$\frac{1}{2}$。

（2）设 BD=BC=x，则 AB=x＋1

∵AE=1，EC=2，∴AC=3。

在 Rt△ABC 中，由勾股定理得，$AB^2=AC^2+BC^2$，即$（x+1）^2=3^2+x^2$。



解得，x=4，即 BD=BC=4。

过点 D 作 DQ⊥AC 于点 Q，∵∠ACB＝90°，

∴DQ∥BC。∴△ADQ∽△ABC。

∴$\frac{AD}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{DQ}{BC}$。

∵AD=1，AB=5，AC=3，BC=4。

∴$\frac{1}{5}=\frac{AQ}{3}=\frac{DQ}{4}$。∴$AQ=\frac{3}{5}$，$DQ=\frac{4}{5}$。∴$QE=AE-AQ=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$。

由 DQ∥BC 得，∠BPD=∠QDE，

$\therefore \tan\angle BPD=\tan\angle QDE=\dfrac{QE}{DQ}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{2}$。

(3) 设 AQ=a，则 QE=1－a。

过 D 点作 DQ⊥AC 于点 Q，则△DQE∽△PCE。

$\therefore \tan\angle BPD=\tan\angle QDE=\dfrac{QE}{DQ}=\dfrac{1-a}{DQ}=\dfrac{1}{3}$。$\therefore DQ=3(1-a)$

在 Rt△ADQ 中，根据据勾股定理得，$AD^2=AQ^2+DQ^2$，

即$1^2=a^2+\left[3(1-a)\right]^2$，解之得$a=1$(舍去)$a=\dfrac{4}{5}$。

$\therefore AQ=\dfrac{4}{5}$，$DQ=\dfrac{3}{5}$。

$\because$△ADQ∽△ABC，$\therefore \dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DQ}{BC}$。

$\because AQ=\dfrac{4}{5}$，AC=1+x，AD=1，$DQ=\dfrac{3}{5}$。

$\therefore \dfrac{\frac{4}{5}}{1+x}=\dfrac{1}{AB}=\dfrac{\frac{3}{5}}{BC}$，即$AB=\dfrac{5+5x}{4}$，$BC=\dfrac{3+3x}{4}$。

$\therefore$△ABC 的周长$y=AB+BC+AC=\dfrac{5+5x}{4}+\dfrac{3+3x}{4}+1+x=3+3x$。

即：$y=3+3x$，其中 x>0。

【考点】等腰三角形的性质，相似三角形的判定和性质，含 30^0 角直角三角形的性质，勾股定理，平行的性质，锐角三角函数定义，解方程。

【分析】（1）由已知，证出△BDP 为等腰三角形。由△AEP∽△BDP 证出 AE=EP=1 和△ECP 是含 30^0 角的直角三角形，根据 30^0 角所对边是斜边一半的性质得 EC=$\dfrac{1}{2}$ EP=$\dfrac{1}{2}$。

（2）Rt△ABC 中，由勾股定理求得 BD=BC=4。过点 D 作 DQ⊥AC 于点 Q，根据相似三角形的判定和性质证得△ADQ∽△ABC，从而得到$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{DQ}{BC}$，求得 AQ=$\dfrac{3}{5}$，DQ=$\dfrac{4}{5}$，$QE=\dfrac{2}{5}$。根据平行线内错角相等的性质和锐角三角函数定义，得到$\tan\angle BPD=\tan\angle QDE=\dfrac{QE}{DQ}=\dfrac{1}{2}$。

（3）设 AQ=a，过 D 点作 DQ⊥AC 于点 Q，则△DQE∽△PCE。根据相似三角形的性质和$\tan\angle BPD=\dfrac{1}{3}$求得$DQ=3(1-a)$。 在 Rt△ADQ 中，根据据勾股定理得$a=\dfrac{4}{5}$，从而求得 AQ=$\dfrac{4}{5}$，DQ=$\dfrac{3}{5}$。由

△ADQ∽△ABC，根据相似三角形的性质得 $\frac{AQ}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DQ}{BC}$，从而得到 $AB=\frac{5+5x}{4},BC=\frac{3+3x}{4}$，即可求得 y 关于 x 的函数关系式。

19.（上海市 2011 年 12 分）已知平面直角坐标系 xOy（如图 1），一次函数 $y=\frac{3}{4}x+3$ 的图 像与 y 轴交于点 A，点 M 在正比例函数 $y=\frac{3}{2}x$ 的图像上，且 MO＝MA．二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像经过点 A、M．

（1）求线段 AM 的长；

（2）求这个二次函数的解析式；

（3）如果点 B 在 y 轴上，且位于点 A 下方，点 C 在上述二次函数的图像上，点 D 在一次函数 $y=\frac{3}{4}x+3$ 的图像上，且四边形 ABCD 是菱形，求点 C 的坐标．

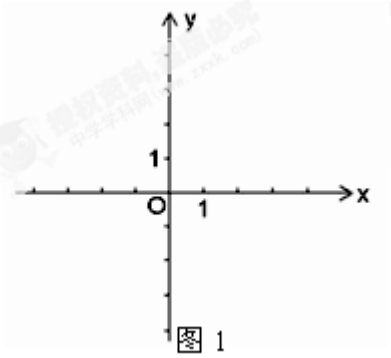


图 1

【答案】解：（1）在一次函数 $y=\frac{3}{4}x+3$ 中，当 $x=0$ 时，$y=3$。∴A（0，3）。

∵MO=MA，∴M 为 OA 垂直平分线上的点，而 OA 垂直平分线的解析式为 $y=\frac{3}{2}$。

又∵点 M 在反比例函数 $y=\frac{3}{2}x$ 上，∴M（1，$\frac{3}{2}$）。

又∵A（0，3）．∴AM= $\frac{\sqrt{13}}{2}$。

（2）∵二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 A、M．可得

$\begin{cases}1+b+c=\frac{3}{2}\\0+0+c=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=-\frac{5}{2}\\c=3\end{cases}$。∴这个二次函数的解析式 $y=x^2-\frac{5}{2}x+3$。

（3）∵点 D 在一次函数 y= $y=\frac{3}{4}x+3$ 的图象上，

则可设 D（n，$\frac{3}{4}n+3$），设 B（0，m）（m＜3），C（n，$n^2-\frac{5}{2}n+3$）。

∵四边形 ABDC 是菱形，

∴|AB|=3—m，|DC|= y_D-y_C = $\frac{3}{4}n+3-(n^2-\frac{5}{2}n+3)=-n^2+\frac{13}{4}n$。

$|AD|=\sqrt{(n-0)^2+\left(\frac{3}{4}n+3-3\right)^2}=\frac{5}{4}n$

∵$|AB|=|DC|$，∴$3-m=-n^2+\frac{13}{4}n$ ①。

∵$|AB|=|AD|$，∴$3-m=\frac{5}{4}n$ ②。

解①②得，$n_1=0$（舍去），$n_2=2$。

将 n=2，代入 C（n，$n^2-\frac{5}{2}n+3$）。∴点 C 的坐标为 C（2，2）。

【考点】二次函数综合题，线段垂直平分线的性质，曲线上的点与方程的关系，待定系数法，菱形的性质，勾股定理。

【分析】（1）先求出根据 OA 垂直平分线上的解析式，再根据两点的距离公式求出线段 AM 的长。

（2）二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 A、M．由待定系数法即可求出二次函数的解析式。

（3）可设 D（n，$\frac{3}{4}n+3$），，C（n，$n^2-\frac{5}{2}n+3$）且点 C 在二次函数 $y=x^2-\frac{5}{2}x+3$ 上，根据菱形的性质得出$|AB|=|DC|$，$|AB|=|AD|$，得到方程求解即可。

20.（上海市 2011 年 14 分）在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，BC＝30，AB＝50．点 P 是 AB 边上任意一点，直线 PE⊥AB，与边 AC 或 BC 相交于 E．点 M 在线段 AP 上，点 N 在线段 BP 上，EM＝EN，$\sin\angle EMP=\frac{12}{13}$．

（1）如图 1，当点 E 与点 C 重合时，求 CM 的长；

（2）如图 2，当点 E 在边 AC 上时，点 E 不与点 A、C 重合，设 AP＝x，BN＝y，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出函数的定义域；

（3）若△AME∽△ENB（△AME 的顶点 A、M、E 分别与△ENB 的顶点 E、N、B 对应），求 AP 的长．

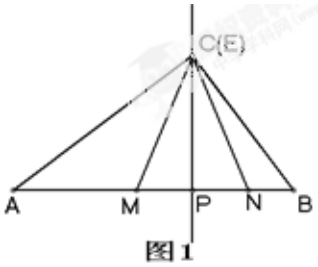


图 1

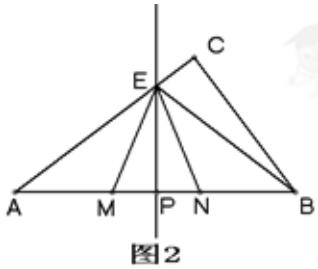
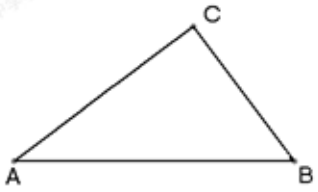


图 2



备用图

【答案】解：（1）∵∠ACB=90°，∴AC=$\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40$ 。

∵CP⊥AB，∴ △ABC∽△CPB。∴$\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CP}$ ，即$\frac{50}{30}=\frac{40}{CP}$。∴CP=24。

∴CM=$\frac{CP}{\sin\angle EMP}=\frac{24}{\frac{12}{13}}=26$。

（2）∵ $\sin\angle EMP=\frac{12}{13}$，∴设 EP=12$a$，则 EM=13$a$，PM=5$a$。

∵EM=EN，∴EN=13a，PN=5a。

∵△AEP∽△ABC，∴ $\frac{PE}{AP}=\frac{BC}{AC}$，即 $\frac{12a}{x}=\frac{30}{40}$。∴ $x=16a$，$a=\frac{x}{16}$，∴BP=50－16a，

∴y=50－21a，=50－21· $\frac{x}{16}$，=50－ $\frac{21}{16}x$。

由（1），当点 E 与点 C 重合时，AP=$\sqrt{AC^2-CP^2}=\sqrt{40^2-24^2}=32$，

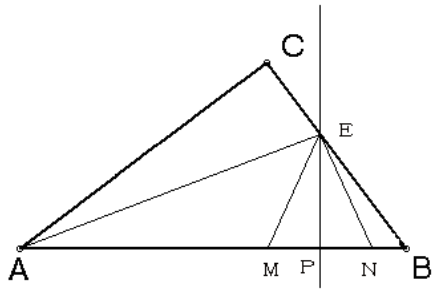
∴函数的定义域是：0< x <32。

（3）①当点 E 在 AC 上时，如图 2，由（2）知，AP=16a，BN= y=50－ $\frac{21}{16}(16a)=50-21a$，

EN=EM=13a，AM=AP－MP=16a －5a =11a 。

∵△AME∽△ENB，∴ $\frac{AM}{EN}=\frac{ME}{NB}$，即 $\frac{11a}{13a}=\frac{13a}{50-21a}$。∴ $a=\frac{11}{8}$。 ∴AP=16×$\frac{11}{8}$=22。

②当点 E 在 BC 上时，如图，设 EP=12a，则 EM=13a，MP=NP=5a，



∵△EBP∽△ABC，∴ $\frac{BP}{BC}=\frac{EP}{AC}$，即 $\frac{BP}{30}=\frac{12a}{40}$。∴BP=9$a$ 。

∴BN=9a －5a =4a，AM=50－9a －5a =50－14a 。

∵△AME∽△ENB， $\frac{AM}{EN}=\frac{ME}{NB}$，即 $\frac{50-14a}{13a}=\frac{13a}{4a}$。

∴ $a=\frac{8}{9}$。∴AP=50－9×$\frac{8}{9}$=42。

综上所述，AP 的长为：22 或 42。

【考点】勾股定理，相似三角形的判定与性质，解直角三角形的应用。

【分析】（1）根据已知条件得出 AC 的值，再根据 CP⊥AB 求出 CP，从而得出 CM 的值。

（2）根据 EM＝EN，$\sin\angle EMP=\frac{12}{13}$，设出 EP 的值，从而得出 EM 和 PM 的值，再得出△AEP∽△ABC，

即可求出 $\frac{PE}{AP}=\frac{BC}{AC}$，求出 a 的值，即可得出 y 关于 x 的函数关系式，并且能求出函数的定义域.

（3）设EP的值，得出则EM和MP的值，然后分点E在AC上和点E在BC上两种情况，根据△EBP∽△ABCC，

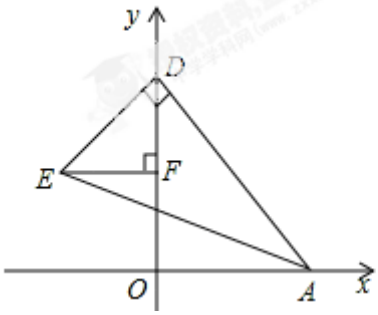
求出 AP 的值，从而得出 AM 和 BN 的值，再根据△AME∽△ENB，求出 a 的值，得出 AP 的长。

21.（2012 上海市 12 分）如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2+6x+c$ 的图象经过点 A（4，0）、B（－1，0），与 y 轴交于点 C，点 D 在线段 OC 上，OD=t，点 E 在第二象限，∠ADE=90°，$\tan\angle DAE=\frac{1}{2}$，EF⊥OD，垂足为 F.

（1）求这个二次函数的解析式；

（2）求线段 EF、OF 的长（用含 t 的代数式表示）；

（3）当∠ECA=∠OAC 时，求 t 的值.



【答案】解：（1）二次函数 $y=ax^2+6x+c$ 的图象经过点 A（4，0）、B（－1，0），

$\therefore \begin{cases}16a+24+c=0\\ a-6+c=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-2\\ c=8\end{cases}$。

∴这个二次函数的解析式为：$y=-2x^2+6x+8$。

（2）∵∠EFD=∠EDA=90°，∴∠DEF+∠EDF=90°，∠EDF+∠ODA=90°。∴∠DEF=∠ODA。

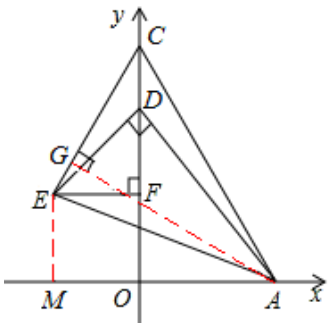
∴△EDF∽△DAO。∴ $\frac{EF}{DO}=\frac{ED}{DA}$。

∵ $\frac{ED}{DA}=\tan\angle DAE=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{EF}{DO}=\frac{1}{2}$。

∵OD=t，∴ $\frac{EF}{t}=\frac{1}{2}$，∴ $EF=\frac{1}{2}t$。

同理 $\frac{DF}{OA}=\frac{ED}{DA}$，∴DF=2，∴OF=t－2。

（3）∵抛物线的解析式为：$y=-2x^2+6x+8$，∴C（0，8），OC=8。



如图，连接 EC、AC，过 A 作 EC 的垂线交 CE 于 G 点.

∵∠ECA=∠OAC，∴∠OAC=∠GCA（等角的余角相等）。

在△CAG 与△OCA 中，

∵∠OAC=∠GCA，AC=CA，∠ECA=∠OAC，

∴△CAG≌△OCA（ASA）。∴CG=AO=4，AG=OC=8。

如图，过 E 点作 EM⊥x 轴于点 M，

则在 Rt△AEM 中，EM=OF=t－2，$AM=OA+AM=OA+EF=4+\frac{1}{2}t$，

由勾股定理得：$AE^2=AM^2+EM^2=\left(4+\frac{1}{2}t\right)^2+(t-2)^2$。

在 Rt△AEG 中，由勾股定理得：$EG=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{\left(4+\frac{1}{2}t\right)^2+(t-2)^2-8^2}=\sqrt{\frac{5}{4}t^2-44}$。

在 Rt△ECF 中，$EF=\frac{1}{2}t$，CF=OC－OF=10－t，$CE=CG+EG=4+\sqrt{\frac{5}{4}t^2-44}$

由勾股定理得：$EF^2+CF^2=CE^2$，即$\left(\frac{1}{2}t\right)^2+(10-t)^2=\left(4+\sqrt{\frac{5}{4}t^2-44}\right)^2$。

解得 $t_1=10$（不合题意，舍去），$t_2=6$。

∴t=6。

【考点】二次函数综合题，曲线上点的坐标与方程的关系，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数定义，全等三角形的判定和性质，勾股定理。

【分析】（1）已知点 A、B 坐标，用待定系数法求抛物线解析式即可。

（2）先证明△EDF∽△DAO，然后利用相似三角形对应边的比例关系以及三角形函数的定义求解。

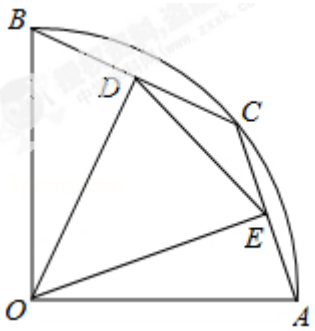
（3）通过作辅助线构造一对全等三角形：△CAG≌△OCA，得到 CG、AG 的长度；然后利用勾股定理求得 AE、EG 的长度（用含 t 的代数式表示）；最后在 Rt△ECF 中，利用勾股定理，得到关于 t 的无理方程，解方程求出 t 的值。

22.（2012 上海市 14 分）如图，在半径为 2 的扇形 AOB 中，∠AOB=90°，点 C 是弧 AB 上的一个动点（不与点 A、B 重合）OD⊥BC，OE⊥AC，垂足分别为 D、E.

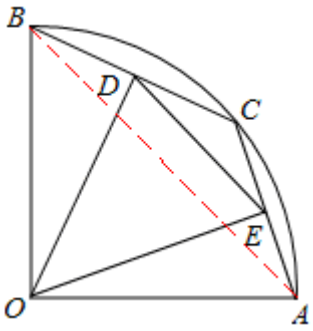
（1）当 BC=1 时，求线段 OD 的长；

（2）在△DOE 中是否存在长度保持不变的边？如果存在，请指出并求其长度，如果不存在，请说明理由；

（3）设 BD=x，△DOE 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出它的定义域.



【答案】解：（1）∵点 O 是圆心，OD⊥BC，BC=1，∴BD=$\frac{1}{2}$BC=$\frac{1}{2}$。

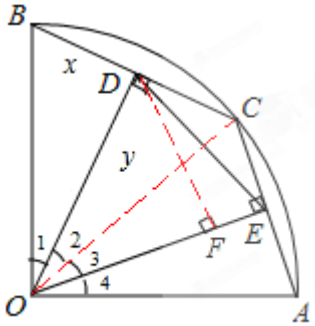


又∵OB=2，∴ OD=$\sqrt{OB^2-BD^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$。

（2）存在，DE 是不变的。

如图，连接 AB，则AB=$\sqrt{OB^2+OA^2}=2\sqrt{2}$。

∵D 和 E 是中点，∴DE=$\frac{1}{2}$AB=$\sqrt{2}$。



（3）∵BD=x，∴ OD=$\sqrt{4-x^2}$。

∵∠1=∠2，∠3=∠4，∠AOB=90^0。

∴∠2+∠3=45°。

过 D 作 DF⊥OE，垂足为点 F。∴DF=OF=$\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$。

由△BOD∽△EDF，得$\frac{BD}{EF}=\frac{OD}{DF}$，即

$\frac{x}{EF}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}$，解得 EF=$\frac{1}{\sqrt{2}}x$。

∴OE=$\frac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$。

∴$y=\frac{1}{2}DF\cdot OE=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}=\frac{4-x^2+x\sqrt{4-x^2}}{4}(0<x<\sqrt{2})$。

【考点】垂径定理，勾股定理，等腰直角三角形的判定和性质，三角形中位线定理，相似三角形的判定和性质。

【分析】（1）由 OD⊥BC，根据垂径定理可得出 BD=$\frac{1}{2}$BC=$\frac{1}{2}$，在 Rt△BOD 中利用勾股定理即可求出 OD 的长。

（2）连接 AB，由△AOB 是等腰直角三角形可得出 AB 的长，再由 D 和 E 是中点，根据三角形中位线定理可得出 DE=$\sqrt{2}$。

（3）由 BD=x，可知OD=$\sqrt{4-x^2}$，由于∠1=∠2，∠3=∠4，所以∠2+∠3=45°，过 D 作 DF⊥OE，则 DF=OF=$\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$，EF=$\frac{1}{\sqrt{2}}x$，OE=$\frac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$，即可求得 y 关于 x 的函数关系式。

∵AB=$\sqrt{OB^2+OA^2}=2\sqrt{2}$，点 C 是弧 AB 上的一个动点（不与点 A、B 重合），

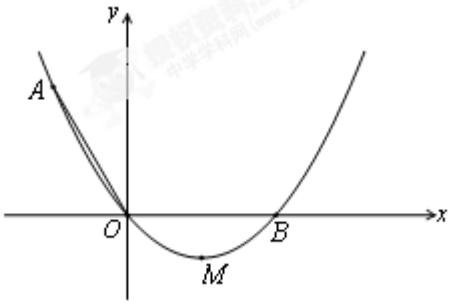
∴$0<x<\sqrt{2}$。

23.（2013 年上海市 12 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，顶点为 M 的抛物线 $y=ax^2+bx(a>0)$经过点 A 和 x 轴正半轴上的点 B，AO=OB=2，∠AOB=120^0.

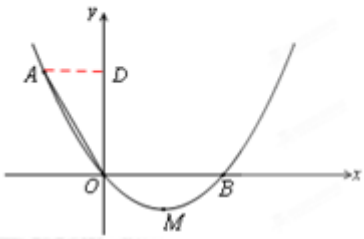
（1）求这条抛物线的表达式；

（2）连接 OM，求∠AOM 的大小；

（3）如果点 C 在 x 轴上，且△ABC 与△AOM 相似，求点 C 的坐标.



【答案】解：（1）如图，过点 A 作 AD⊥y 轴于点 D，



∵AO=OB=2，∴B（2，0）。

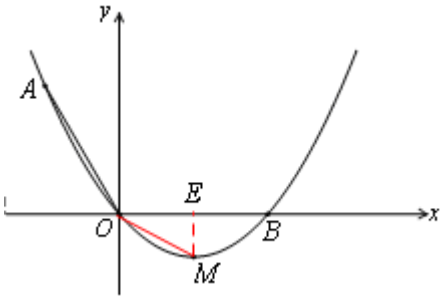
∵∠AOB=120⁰，∴∠AOD=30⁰，∴AD=1，OD=$\sqrt{3}$。

∴A（−1，$\sqrt{3}$）。

将 A（−1，$\sqrt{3}$），B（2，0）代入 $y=ax^2+bx$，得：

$\begin{cases} a-b=\sqrt{3} \\ 4a+2b=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ b=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$。

∴这条抛物线的表达式为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$。



（2）过点 M 作 ME⊥x 轴于点 E，

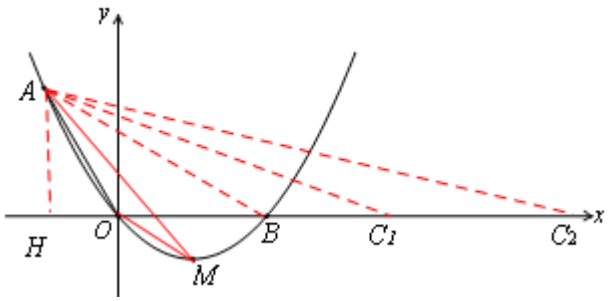
∵ $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

∴M（1，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$），即 OE=1，EM=$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

$\therefore \tan\angle EPM=\frac{EM}{OE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。$\therefore \angle EPM=30^0$。

$\therefore \angle AOM=\angle AOB+\angle EPM=150^0$。

（3）过点 A 作 AH⊥x 轴于点 H ，



∵AH=$\sqrt{3}$，HB=HO＋OB=3，

$\therefore \tan\angle ABH=\frac{AH}{HB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

$\therefore \angle ABH=30^0$，$\therefore \angle ABC=150^0$。

$\therefore \angle AOM=\angle ABC$。

∴要△ABC 与△AOM 相似，则必须：

①$\frac{AO}{AB}=\frac{OM}{BC}$，或②$\frac{AO}{BC}=\frac{OM}{AB}$。

设点 C 的坐标为（c，0），则根据坐标和勾股定理，有

AO=2，$OM=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$BC=c-2$，$AB=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$。

①由$\frac{AO}{AB}=\frac{OM}{BC}$得，$\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{c-2}$，解得 c＝4。∴$C_1$（4，0）。

②由$\frac{AO}{BC}=\frac{OM}{AB}$得，$\frac{2}{c-2}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}}$，解得 c＝8。∴$C_2$（8，0）。

综上所述，如果点 C 在 x 轴上，且△ABC 与△AOM 相似，则点 C 的坐标为（4，0）或（8，0）。

【考点】二次函数综合题，锐角三角函数定义，特殊角的三角函数值，曲线上点的坐标与方程的关系，二次函数的性质，勾股定理，相似三角形的判定，分类思想的应用。

【分析】（1）应用三角函数求出点 A 的坐标，将 A，B 的坐标代入 $y=ax^2+bx$，即可求得 a、b，从而求得抛物线的表达式。

（2）应用二次函数的性质，求出点 M 的坐标，从而求得 $\angle EPM=30^0$，进而求得∠AOM 的大小。

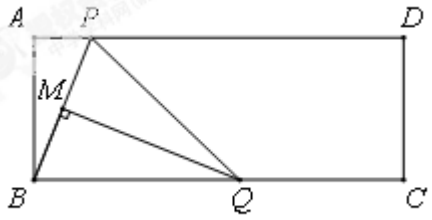
（3）由于可得 $\angle AOM=\angle ABC$，根据相似三角形的判定，分 $\frac{AO}{AB}=\frac{OM}{BC}$，$\frac{AO}{BC}=\frac{OM}{AB}$ 两种情况讨论。

24.（2013 年上海市 14 分）在矩形 ABCD 中，点 P 是边 AD 上的动点，连接 BP，线段 BP 的垂直平分线交边 BC 于点 Q，垂足为点 M，连接 QP（如图）．已知 AD=13，AB=5，设 AP=x，BQ=y.

（1）求 y 关于 x 的函数解析式，并写出 x 的取值范围；

（2）当以 AP 长为半径的⊙P 和以 QC 长为半径的⊙Q 外切时，求 x 的值；

（3）点 E 在边 CD 上，过点 E 作直线 QP 的垂线，垂足为 F，如果 EF=EC=4，求 x 的值．





【答案】解：（1）根据题意，得 AP=x，BQ=y，AB=5，$BP=\sqrt{5^2+x^2}=\sqrt{25+x^2}$，

∵QM 是线段 BP 的垂直平分线，$\therefore BM=\frac{\sqrt{25+x^2}}{2}$。

易得△ABP∽△MQB，$\therefore \frac{PA}{BM}=\frac{BP}{QB}$，即 $\frac{x}{\frac{\sqrt{25+x^2}}{2}}=\frac{\sqrt{25+x^2}}{y}$。

化简，得 $y=\frac{1}{2x}\left(25+x^2\right)$。

∴y 关于 x 的函数解析式为 $y=\frac{1}{2x}\left(25+x^2\right)$，x 的取值范围为 $1\le x\le 13$。

（2）根据题意，⊙P 和⊙Q 的圆心距 PQ=BQ= y，⊙P 的半径为 x，⊙Q 的半径为 $(13-y)$，

若⊙P 和⊙Q 外切，则 $x+(13-y)=y$，即 $y=\frac{x+13}{2}$。

代入 $y=\frac{1}{2x}\left(25+x^2\right)$，得 $\frac{x+13}{2}=\frac{1}{2x}\left(25+x^2\right)$

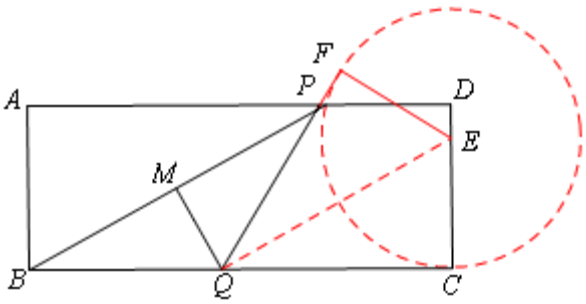
解得 $x=\frac{25}{13}$。

∴当以 AP 长为半径的⊙P 和以 QC 长为半径的⊙Q 外切时，$x=\frac{25}{13}$。

（3）∵EF=EC=4，且 EF⊥PQ，EC⊥BC，

∴PQ 和 BC 是以点 E 为圆心，4 为半径圆的两条切线。

连接 EQ，



易得，△ABP∽△CEQ，∴ $\frac{AB}{CE}=\frac{AP}{CQ}$。

∵AB=5，AP=x，CE=4，CQ=13－y，

∴ $\frac{5}{4}=\frac{x}{13-y}$，即 $y=13-\frac{4}{5}x$。

代入 $y=\frac{1}{2x}\left(25+x^2\right)$，得 $13-\frac{4}{5}x=\frac{1}{2x}\left(25+x^2\right)$

整理，得 $13x^2-130x+125=0$，解得 $x=\frac{65\pm10\sqrt{26}}{13}$。

∴满足条件的 x 值为：$x=\frac{65+10\sqrt{26}}{13}$ 或 $x=\frac{65-10\sqrt{26}}{13}$。

【考点】动点问题，矩形的性质，勾股定理，线段垂直平分线的性质，相似三角形的判定和性质，由实际问题列函数关系式，圆与圆的位置关系，切线的判定和性质。

【分析】（1）由△ABP∽△MQB 列比例式即可得 y 关于 x 的函数解析式。

当 y=13 时，$13=\frac{1}{2x}\left(25+x^2\right)$，解得 $x=1$，此为 x 的最小值；最大值为 13。

因此，x 的取值范围为 $1\le x\le13$。

（2）若⊙P 和⊙Q 外切，圆心距等于两半径之和，据此列式化简代入（1）的函数关系式求解。

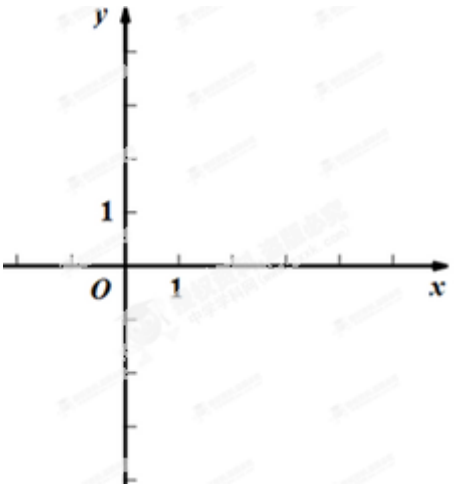
（3）根据题意，PQ 和 BC 是以点 E 为圆心，4 为半径圆的两条切线，从而可得△ABP∽△CEQ，据此列比例式简代入（1）的函数关系式求解。

25.（上海市 2014 年 12 分）在平面直角坐标系中（如图），已知抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A(－1，0)和点 B，与 y 轴交于点 C(0，－2).

（1）求该抛物线的表达式，并写出其对称轴；

（2）点 E 为该抛物线的对称轴与 x 轴的交点，点 F 在对称轴上，四边形 ACEF 为梯形，求点 F 的坐标；

（3）点 D 为该抛物线的顶点，设点 P(t, 0)，且 t＞3，如果△BDP 和△CDP 的面积相等，求 t 的值．



【答案】（1）$y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2$，$x=1$；（2）（1，4）；（3）5.

【解析】

试题分析：（1）由抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A(－1，0)和点 B，与 y 轴交于点 C(0，－2)，根据点在曲线上点的坐标满足方程的关系列方程组求解即可得到该抛物线的表达式，化为顶点式即可求得其对称轴.

（2）分 AC∥EF 和 AF∥CE 两种情况讨论即可.

（3）由△BDP 和△CDP 的面积相等可得 DF∥BC，从而只要求出 BC 的解析式，进面得到 DF 的解析式，令 $y=0$ 即可求得 t 的值.

试题解析：（1）∵抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A(－1，0)和点 B，与 y 轴交于点 C(0，－2)，

$\therefore\begin{cases}\frac{2}{3}-b+c=0\\ c=-2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=-\frac{4}{3}\\ c=-2\end{cases}$.

∴该抛物线的表达式为 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2$.

∵ $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2=\frac{2}{3}(x-1)^2-\frac{8}{3}$，∴其对称轴为 $x=1$.

（2）由（1）知，E（1，0），A(－1，0)，C(0，－2)，

分两种情况讨论：

①当 AC∥EF 时，易求直线 AC 的解析式为 $y=-2x-2$，设直线 EF 的解析式为 $y=-2x+m$，

将 E（1，0）代入得 $m=2$，∴直线 EF 的解析式为 $y=-2x+2$.

当 $x=1$时，$y=0$，∴点 F 与点 E 重合. 此时，四边形 ACEF 不存在.

②当 AF∥CE 时，易求直线 CE 的解析式为 $y=2x-2$，设直线 AF 的解析式为 $y=2x+n$，

将 A(－1，0)代入得 $n=2$，∴直线 EF 的解析式为 $y=2x+2$.

当 $x=1$时，$y=4$，∴此时，点 F 的坐标为（1，4）.

综上所述，点 F 的坐标为（1，4）.

（3）在 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2$ 中令 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，∴点 B（3，0）.

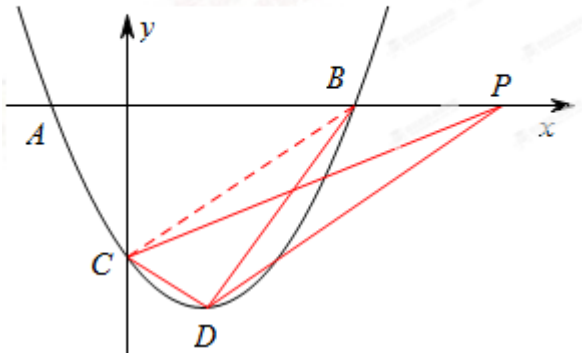
由 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2=\frac{2}{3}(x-1)^2-\frac{8}{3}$ 知点 $D\left(1,-\frac{8}{3}\right)$.

若△BDP 和△CDP 的面积相等，则 DF∥BC.

易求直线 BC 的解析式为 $y=\frac{2}{3}x-2$，设直线 EF 的解析式为 $y=\frac{2}{3}x+h$，

将 $D\left(1,-\frac{8}{3}\right)$代入得 $h=-\frac{10}{3}$，∴直线 EF 的解析式为 $y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$.

当 $y=0$时，$x=5$. ∴t=5.



考点：1.二次函数综合题；2.曲线上点的坐标与方程的关系；3.待定系数的应用；4.二次函数的性质；5.梯形的性质；6.同底等高三角形的面积；7.分类思想的应用.

26.（上海市 2014 年 14 分）如图 1，已知在平行四边形 ABCD 中，AB＝5，BC＝8，cosB＝$\frac{4}{5}$，点 P 是边 BC 上的动点，以 CP 为半径的⊙C 与边 AD 交于点 E、F（点 F 在点 E 的右侧），射线 CE 与射线 BA 交于点 G.

（1）当⊙C 经过点 A 时，求 CP 的长；

（2）连接 AP，当 AP//CG 时，求弦 EF 的长；

（3）当△AGE 是等腰三角形时，求⊙C 的半径长.

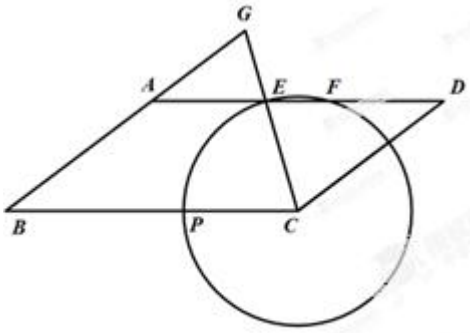
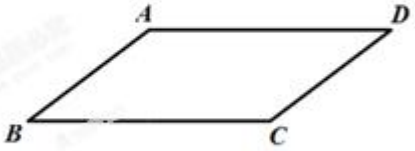


图 1



备用图

【答案】（1）5；（2）$\frac{7}{4}$；（3）$\sqrt{10}$.

【解析】

试题分析：（1）当⊙C 经过点 A 时，过 A 点作 AH⊥BC 于点 H，构造两个直角三角形 ABH 和 AHC，应用锐角三角函数定义和勾股定理即可求解.

（2）判断四边形 APCE 是菱形，从而学科网解 Rt△CPM 求出 CE=CP=$\frac{25}{8}$，过点 C 作 CN⊥EF 于点 N，则由垂径定理有 EN=NF，从而解 Rt△CEN 即可求出 EN 的长，进而得到 EF 的长.

（3）通过反证明说明当△AGE 是等腰三角形时，$\angle AGE=\angle AEG$，在此情况下证明△AEG∽△BCG，建立关于 AE 的方程，求出 AE 的长，从而由勾股定理求⊙C 的半径 OE 长.

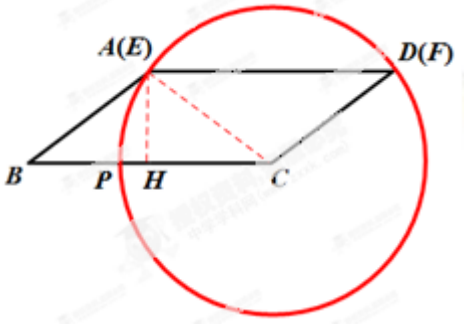
试题解析：（1）如图，当⊙C 经过点 A 时，点 A 与 E 重合，过 A 点作 AH⊥BC 于点 H. 则

∵在 Rt△ABH 中，AB=5，$\cos B=\frac{4}{5}$，∴$BH=AB\cdot\cos B=5\times\frac{4}{5}=4$，$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=3$.

∵BC=8，∴CH=4.

∴在 Rt△AHC 中，$AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=5$.

∴CP=AC=5.



（2）若 AP//CG，则四边形 APCE 是平行四边形.

又∵CE=CP，∴四边形 APCE 是菱形.

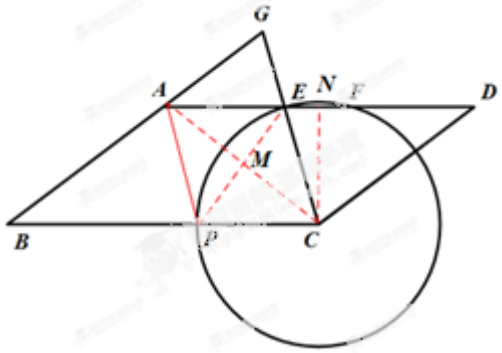
如图，连接 AC，EP，则 AC⊥EP，AM=MC=$\frac{5}{2}$.

由（1）得，AC=AB=5，∴∠ACB=∠B.

∴在 Rt△CPM 中，$CP=\frac{CM}{\cos\angle ACB}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{25}{8}$ ∴CE=CP=$\frac{25}{8}$.

过点 C 作 CN⊥EF 于点 N，则 EN=NF.

由（1）得，CN=3，∴在 Rt△CEN 中，$EN=\sqrt{CE^2-CN^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2-3^2}=\frac{7}{8}$. ∴EF=2EN=$\frac{7}{4}$.



（3）∵cosB=$\frac{4}{5}$，∴$\angle B<45^0$.

又∵$\angle BCG<90^0$，∴$\angle BGC>45^0$.

又∵$\angle AEG=\angle BCG\geq\angle ACB=\angle B$，∴当$\angle AEG=\angle B$时，A、E、G 重合.

∴只能$\angle AGE=\angle AEG$.

∵AD//BC，∴△AEG∽△BCG ∴$\frac{AE}{BC}=\frac{AG}{BG}$，即$\frac{AE}{8}=\frac{AE}{AE+5}$.

解得 $AE=3$，$EN=AN-AE=1$.

∴$CE=\sqrt{EN^2+CN^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，即⊙C 的半径长为$\sqrt{10}$.

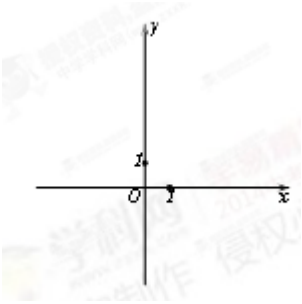
考点：1.锐角三角函数定义；2.勾股定理；3.菱形的判定和性质；4.垂径定理；5.相似三角形的判定和性质.

27、**（上海市 2015 年 12 分）**已知在平面直角坐标系 xOy 中（如图），抛物线 $y=ax^2-4$ 与 x 轴的负半轴相交于点 A，与 y 轴相交于点 B，$AB=2\sqrt{5}$．点 P 在抛物线上，线段 AP 与 y 轴的正半轴交于点 C，线段 BP 与 x 轴相交于点 D．设点 P 的横坐标为 m．

（1）求这条抛物线的解析式；

（2）用含 m 的代数式表示线段 CO 的长；

（3）当 $\tan\angle ODC=\dfrac{3}{2}$ 时，求 $\angle PAD$ 的正弦值.

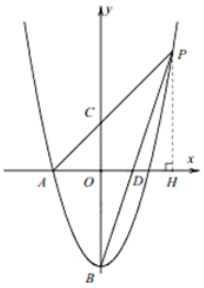


【答案】（1）$y=x^2-4$；（2）$OC=2m-4$；（3）$\sin\angle PAD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

试题分析：（1）先根据勾股定理求得 OA 的长度，从而确定 A 的坐标，代入抛物线解析式即可；（2）可借助三角形相似，$\Delta BOD\backsim\Delta PHD$，利用对应边成比例得到 OC 的表达式；（3）再一次利用三角形相似，$\Delta BOD\backsim\Delta PHD$，先求出 OD 的表达式，结合 $\tan\angle ODC=\dfrac{3}{2}$，求出 m 的值，进而得到 P 坐标以及相关的线段长度，再将 $\angle PAD$ 的正弦值放到 $Rt\Delta PAH$ 中求解即可.

试卷解析：作图如下：



（1）∵ $AB=2\sqrt{5}$，$OB=4$，∴ $OA=2$，即 $A(-2,0)$，∵ A 在抛物线上，∴ $4a-4=0$，∴ $a=1$，∴ 抛物线的解析式为 $y=x^2-4$；

（2）由（1）得 $P(m,m^2-4)$（$m>2$），∴ $PH=m^2-4$，$OH=m$，∵ $OC//PH$，∴ $\Delta AOC\backsim\Delta AHP$，∴ $\dfrac{CO}{PH}=\dfrac{AO}{AH}$，即 $\dfrac{CO}{m^2-4}=\dfrac{2}{2+m}$，∴ $CO=2(m-2)=2m-4$；

（3）$\because OB//PH$，$\therefore \Delta BOD\backsim\Delta PHD$，$\therefore \frac{BO}{OD}=\frac{PH}{HD}$，即$\frac{4}{OD}=\frac{m^2-4}{m-OD}$，解得$OD=\frac{4}{m}$，

$\because \tan\angle ODC=\frac{3}{2}$，$\therefore \frac{OC}{OD}=\frac{2m-4}{\frac{4}{m}}=\frac{3}{2}$，解得$m=3$学科网或$m=-1$（舍），$\therefore P(3,5)$，$PH=AH=5$，

$AP=5\sqrt{2}$，$\therefore \sin\angle PAD=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

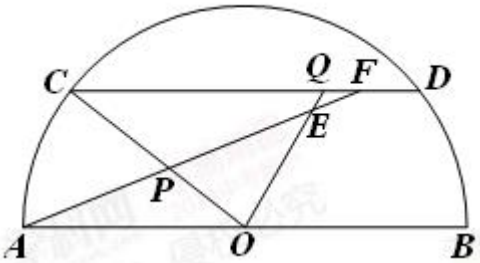
考点：1. 待定系数法求函数解析式；2. 三角形相似的判定与性质；3. 锐角三角函数.

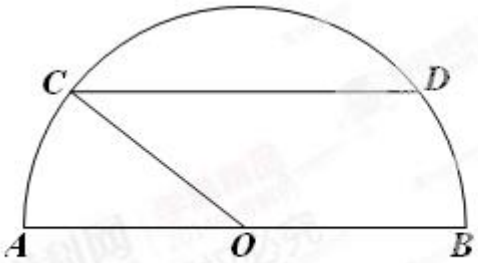
28、（上海市 2015 年 14 分）已知：如图，AB 是半圆 O 的直径，弦 $CD//AB$，动点 P、Q 分别在线段 OC、CD 上，且 $DQ=OP$，AP 的延长线与射线 OQ 相交于点 E、与弦 CD 相交于点 F（点 F 与点 C、D 不重合），$AB=20$，$\cos\angle AOC=\frac{4}{5}$．设 $OP=x$，ΔCPF 的面积为 y．

（1）求证：$AP=OQ$；

（2）求 y 关于 x 的函数关系式，并写出它的定义域；

（3）当 ΔOPE 是直角三角形时，求线段 OP 的长．





备用图

【答案】（1）通过证明 $\Delta AOP\cong\Delta ODQ$，过程略；（2）$y=\frac{3x^2-60x+300}{x}(\frac{50}{13}<x<10)$；（3）$OP=8$

【解析】

试题分析：（1）证明线段相等的方法之一是证明三角形全等，通过分析已知条件，$OP=DQ$，联结 OD 后还有 $OA=DO$，再结合要证明的结论 $AP=OQ$，则可肯定需证明三角形全等，寻找已知对应边的夹角，即 $\angle POA=\angle QDO$ 即可；（2）根据 $\Delta PFC\backsim\Delta PAO$，将面积转化为相似三角形对应边之比的平方来求；（3）分成三种情况讨论，充分利用已知条件 $\cos\angle AOC=\frac{4}{5}$、以及（1）（2）中已证的结论，注意要对不符合（2）中定义域的答案舍去.

试卷解析：（1）联结 OD，$\because OC=OD$，$\therefore \angle OCD=\angle ODC$，$\because CD//AB$，

$\therefore \angle OCD=\angle COA$，$\therefore \angle POA=\angle QDO$．在 ΔAOP 和 ΔODQ 中，$\begin{cases}OP=DQ\\ \angle POA=\angle QDO\\ OA=DO\end{cases}$，

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta ODQ$，$\therefore AP = OQ$；

⑵作 $PH \perp OA$，交 OA 于 H，$\because \cos\angle AOC = \frac{4}{5}$，$\therefore OH = \frac{4}{5}OP = \frac{4}{5}x$，$PH = \frac{3}{5}x$，

$\therefore S_{\Delta AOP} = \frac{1}{2}AO \cdot PH = 3x$．$\because CD // AB$，$\therefore \Delta PFC \backsim \Delta PAO$，

$\therefore \frac{y}{S_{\Delta AOP}} = (\frac{CP}{OP})^2 = (\frac{10-x}{x})^2$，$\therefore y = \frac{3x^2 - 60x + 300}{x}$，当 F 与点 D 重合时，

$\because CD = 2OC \cdot \cos\angle OCD = 2 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 16$，$\therefore \frac{x}{10-x} = \frac{10}{16}$，解得 $x = \frac{50}{13}$，

$\therefore y = \frac{3x^2 - 60x + 300}{x}$ $(\frac{50}{13} < x < 10)$；

（3）①当 $\angle OPE = 90°$ 时，$\angle OPA = 90°$，$\therefore OP = OA \cdot \cos\angle AOC = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8$；

②当 $\angle POE = 90°$ 时，$CQ = \frac{OC}{\cos\angle QCO} = \frac{10}{\cos\angle AOC} = \frac{10}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{2}$，

$\therefore OP = DQ = CD - CQ = CD - \frac{25}{2} = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}$，$\because \frac{50}{13} < OP < 10$，$\therefore OP = \frac{7}{2}$（舍）；

③当 $\angle PEO = 90°$ 时，$\because CD // AB$，$\therefore \angle AOQ = \angle DQO$，$\because \Delta AOP \cong \Delta ODQ$，

$\therefore \angle DQO = \angle APO$，$\therefore \angle AOQ = \angle APO$，$\therefore \angle AEO = \angle AOP = 90°$，此时弦 CD 不存在，故这种情况不符合题意，舍；

综上，线段 OP 的长为 8．学科网

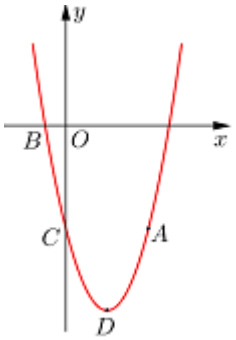
考点：1. 三角形全等的判定及性质；2. 锐角三角函数的综合应用；3. 圆的综合应用.

29.（上海市 2016 年 12 分）如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$（$a \neq 0$）经过点 $A(4, -5)$，与 x 轴的负半轴交于点 B，与 y 轴交于点 C，且 $OC = 5OB$，抛物线的顶点为 D．

（1）求这条抛物线的表达式；

（2）联结 AB、BC、CD、DA，求四边形 $ABCD$ 的面积；

（3）如果点 E 在 y 轴的正半轴上，且 $\angle BEO = \angle ABC$，求点 E 的坐标．



【答案】（1）$y=x^2-4x-5$；（2）18；（3）$E\ (0,\frac{3}{2})$.

【解析】

试题分析：（1）先求出 C、B 的坐标，代入抛物线的解析式即可得到结论；

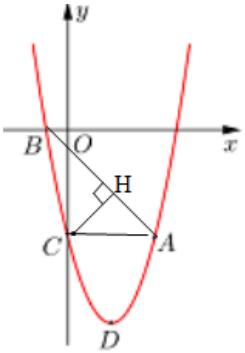
（2）求出 D 的坐标，由 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}$ 计算即可；

（3）过点 C 作 $CH\perp AB$，垂足为点 H，由△ABC 的面积求出 CH 的长，在 Rt△BCH 中，求出 $tan\angle CBH$，在 Rt△BOE 中，求出 $tan\angle BEO$，即可得出 E 的坐标.

试题解析：（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx-5$ 与 y 轴交于点 C，∴ $C(0,-5)$，∴ $OC=5$．∵ $OC=5OB$，∴ $OB=1$．又点 B 在 x 轴的负半轴上，∴ $B(-1,0)$．∵抛物线经过点 $A(4,-5)$ 和点 $B(-1,0)$，∴ $\begin{cases}16a+4b-5=-5\\a-b-5=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}$，∴这条抛物线的表达式为 $y=x^2-4x-5$；

（2）由 $y=x^2-4x-5$，得顶点 D 的坐标是 $(2,-9)$．联结 AC，∵点 A 的坐标是 $(4,-5)$，点 C 的坐标是 $(0,-5)$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times5=10$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=18$；

（3）过点 C 作 $CH\perp AB$，垂足为点 H．∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times CH=10$，$AB=5\sqrt{2}$，∴ $CH=2\sqrt{2}$．在 $Rt\,\Delta BCH$ 中，$\angle BHC=90°$，$BC=\sqrt{26}$，$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=3\sqrt{2}$，∴ $\tan\angle CBH=\frac{CH}{BH}=\frac{2}{3}$；在 $Rt\,\Delta BOE$ 中，$\angle BOE=90°$，$\tan\angle BEO=\frac{BO}{EO}$．∵ $\angle BEO=\angle ABC$，∴ $\frac{BO}{EO}=\frac{2}{3}$，得 $EO=\frac{3}{2}$，∴点 E 的坐标为 $(0,\frac{3}{2})$.



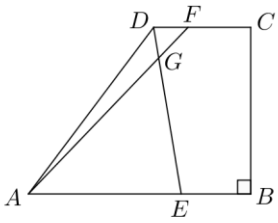
考点：二次函数的图象，二元一次方程组，三角函数，三角形的面积.

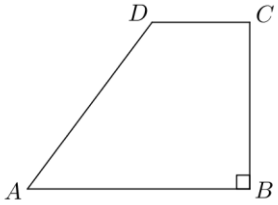
30.（上海市 2016 年 14 分）如图所示，梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$\angle B=90°$，$AD=15$，$AB=16$，$BC=12$，点 E 是边 AB 上的动点，点 F 是射线 CD 上一点，射线 ED 和射线 AF 交于点 G，且 $\angle AGE=\angle DAE$.

（1）求线段 CD 的长；

（2）如果 ΔAEG 是以 EG 为腰的等腰三角形，求线段 AE 的长；

（3）如果点 F 在边 CD 上（不与点 C、D 重合），设 $AE=x$，$DF=y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出 x 的取值范围；





【答案】（1）7；（2）15 或 $\frac{25}{2}$；（3）$y=\frac{225-18x}{x}$（$9<x<\frac{25}{2}$）.

【解析】

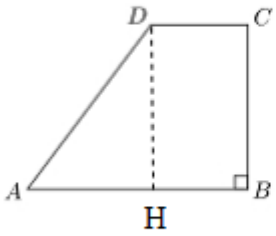
试题分析：（1）过点 D 作 $DH \perp AB$，垂足为点 H，由勾股定理求出 AH 的长，进而求出 DC 的长；

（2）可证 $\Delta AEG \backsim \Delta DEA$，从而得到 ΔDEA 是以 AE 为腰的等腰三角形，分两种情况讨论：① 若 $AE=AD$，② 若 $AE=DE$；

（3）表示出 DE 的长，由 $\Delta AEG \backsim \Delta DEA$，得出 EG 的长，从而得出 DG 的长，由 $DF \parallel AE$，得到 $\frac{DF}{AE}=\frac{DG}{EG}$，化简即可得到结论.

试题解析：（1）过点 D 作 $DH\perp AB$，垂足为点 H．在 $Rt\Delta DAH$ 中，$\angle AHD=90°$，$AD=15$，$DH=12$，

$\therefore AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=9$．又$\because AB=16$，$\therefore CD=BH=AB-AH=7$；



（2）$\because \angle AEG=\angle DEA$，又 $\angle AGE=\angle DAE$，$\therefore \Delta AEG\backsim\Delta DEA$．由 ΔAEG 是以 EG 为腰的等腰三角形，可得 ΔDEA 是以 AE 为腰的等腰三角形．学科网

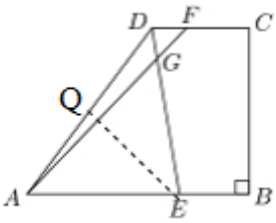
① 若 $AE=AD$，$\because AD=15$，$\therefore AE=15$；

② 若 $AE=DE$，过点 E 作 $EQ\perp AD$，垂足为 Q，$\therefore AQ=\frac{1}{2}AD=\frac{15}{2}$．

在 $Rt\Delta DAH$ 中，$\angle AHD=90°$，$\cos\angle DAH=\frac{AH}{AD}=\frac{3}{5}$；

在 $Rt\Delta AEQ$ 中，$\angle AQE=90°$，$\cos\angle QAE=\frac{AQ}{AE}=\frac{3}{5}$，$\therefore AE=\frac{25}{2}$；

综上所述：当 ΔAEG 是以 EG 为腰的等腰三角形时，线段 AE 的长为 15 或 $\frac{25}{2}$；



（3）在 $Rt\Delta DHE$ 中，$\angle DHE=90°$，$DE=\sqrt{DH^2+EH^2}=\sqrt{12^2+(x-9)^2}$．$\because \Delta AEG\backsim\Delta DEA$，$\therefore$ $\frac{AE}{DE}=\frac{EG}{AE}$，$\therefore EG=\frac{x^2}{\sqrt{12^2+(x-9)^2}}$，$\therefore DG=\sqrt{12^2+(x-9)^2}-\frac{x^2}{\sqrt{12^2+(x-9)^2}}$．$\because DF\ //\ AE$，$\therefore$

$\frac{DF}{AE}=\frac{DG}{EG}$，$\frac{y}{x}=\frac{12^2+(x-9)^2-x^2}{x^2}$，$\therefore y=\frac{225-18x}{x}$，$x$ 的取值范围为 $9<x<\frac{25}{2}$．

考点：勾股定理，三角形的相似，应用数学知识解决问题的能力．