# Part 1 代数式变换

## 1.1 因式分解

【1】$x,y$是正整数，满足$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$的数对$(x,y)=$_____

【解析】式子即$y+4x=xy$，即$xy-4x-y=0$，即$xy-4x-y+4=4$

即$(x-1)(y-4)=4$

$x,y$是正整数，则$x-1\geq 0$，则

$\begin{cases}x-1=4\\y-4=1\end{cases}$或$\begin{cases}x-1=2\\y-4=2\end{cases}$或$\begin{cases}x-1=1\\y-4=4\end{cases}$

因此，$(x,y)=(5,5)$或$(3,6)$或$(2,8)$

【2】$x,y$是正整数，且$x\leq y$，则满足$4xy=15(x+y)$的数对$(x,y)$有_____个

【解析】$4xy-15x-15y=0$，即$16xy-60x-60y=0$

即$16x-60x-60y+225=225$

即$(4x-15)(4y-15)=225$

$225=3^2\times 5^2$，则

$225=1\times 225=3\times 75=5\times 45=9\times 25=15\times 15$

经检验，当$(4x-15,4y-15)=(1,225)$或$(5,45)$或$(9,25)$时，$x,y$有正整数解

因此满足题意的数对有3个

【3】一个直角三角形的三边长均为整数，周长为120，则这样的三角形的三边长分别为_____

【解析】设两条直角边为$a,b$，则$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=120$

则$a^2+b^2=(120-a-b)^2=14400+a^2+b^2-240(a+b)+2ab$

$\therefore 2ab-240(a+b)+14400=0$

即$ab-120(a+b)+7200=0$

$\therefore (120-a)(120-b)=7200$

又$7200=80\times 90=72\times 100=75\times 96$

可得$(120-a,120-b)=(80,90)$或$(75,96)$或$(72,100)$

依次可得$(a,b)=(40,30),(45,24),(48,20)$

因此，三角形三边长分别为$(30,40,50),(24,45,51),(20,48,52)$

## 1.2 配方

【4】若一个正整数$n$能写成另外两个整数的平方和，则称这样的数$n$为“好数”，若一个实数$x$能写成两个好数的商，则称这样的数$x$为“坏数”

求证：(1)任何两个好数的积还是好数

(2)任何一个坏数可以写成两个有理数的平方和

【解析】

(1)设$m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$，其中$a,b,c,d$均为整数，则$m,n$是好数

$$mn=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$$

$$=(a^2c^2+b^2d^2+2abcd)+(b^2c^2+a^2d^2-2abcd)$$

$$=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

$ac+bd,bc-ad$都是整数

因此，若$m,n$是好数，则$mn$也是好数

(2)设$x=\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$，其中$a,b,c,d$为整数，则$x$为坏数

因此

$$x=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}=\frac{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}$$

$$=(\frac{ac+bd}{c^2+d^2})^2+(\frac{bc-ad}{c^2+d^2})^2$$

其中$x$是坏数，$\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$，$\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$都是有理数

因此$x$可以写成两个有理数的平方和

## 1.3 根式的计算

【 5 】 化 简 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{2\ 0\sqrt{1\ 4}+2\sqrt{2014}}=$ 1

_____

【解析】$\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{4}}{4}$$

……

$$\frac{1}{2014\sqrt{2015}+2015\sqrt{2014}}=\frac{2015\sqrt{2014}-2014\sqrt{2015}}{2015\times2014}=\frac{\sqrt{2014}}{2014}-\frac{\sqrt{2015}}{2015}$$

所有式子相加，可得原式=$1-\dfrac{\sqrt{2015}}{2015}$

【6】分母有理化$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$

【解析】

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2\sqrt{6}+4}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(2\sqrt{6}-4)}{(2\sqrt{6}+4)(2\sqrt{6}-4)}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)-4(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{8}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+4}{8}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+4}{8}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

## Part 2 不等式

【7】$a,b,c$为正整数，若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$且$a<b<c$，求$a,b,c$的值

【解析】$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}$，故$a<3$

$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$，故$a>1$

$\therefore 1<a<3$

$\therefore a=2$

则$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{b}$，故$b>2$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}$，故$b<4$

$\therefore 2<b<4$

$\therefore b=3$

$\therefore c=6$

综上，$a=2,b=3,c=6$

【8】关于 $x$ 的方程 $1<ax<2$ 的解集中，有且仅有一个正整数，则 $a$ 的取值范围为_____

【解析】不等式即 $\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}$，设 $b=\frac{1}{a}$，即 $b<x<2b$

要使得在 $b$ 和 $2b$ 中间恰有一个正整数，则

$0.5<b\le 1.5$ 且 $b\neq 1$ 或 $b=2$

即 $\frac{1}{2}<\frac{1}{a}\le\frac{3}{2}$ 且 $\frac{1}{a}\neq 1$ 或 $\frac{1}{a}=2$

$\therefore \frac{2}{3}\le a<2$ 且 $a\neq 1$ 或 $a=\frac{1}{2}$

## Part 3 二次方程根与系数的关系

【9】顶点为 $P$ 的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交于 $A,B$ 两点，若 $\angle APB=120°$，则 $b^2-4ac=$_____

【解析】$|AB|=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，$|y_p|=\frac{-\Delta}{4|a|}$

依题意，$|AB|=2\sqrt{3}|y_P|$。解得 $\Delta=\frac{4}{3}$

【10】设实数 $a,b$ 满足 $a^2(b^2+1)+b(b+2a)=40$，$(a+1)(b+1)=9$，求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的值

【解析】由题意知

$a^2b^2+(a+b)^2=40$，$ab+(a+b)=8$

设 $a+b=x$，$ab=y$，则

$x^2+y^2=40$，$x+y=8$

联立解得 $(x,y)=(2,6)$ 或 $(6,2)$

当 $(x,y)=(2,6)$ 时，$a+b=2,ab=6$

于是 $a,b$ 为一元二次方程 $t^2-2t+6=0$ 的两根，而 $\Delta=4-24=-20<0$，方程无实根

故 $(x,y)=(2,6)$ 不是方程的解，舍去

若 $(x,y)=(6,2)$，则 $a+b=6,ab=2$

于是 $a,b$ 为一元二次方程 $t^2-6t+2=0$ 的两根，$\Delta=36-8=28>0$，方程有实根

则 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{(ab)^2}=\frac{(a+b)^2-2ab}{(ab)^2}=\frac{36-4}{4}=8$