华师一附中 2015 年高中招生考试

数学测试题详解

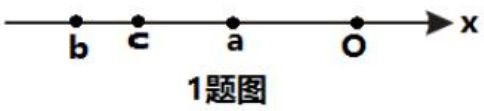
考试时间:80 分钟　卷面满分:150 分

一.选择题（6 分×6=36 分）

1,如果实数 a,b,c 在数轴上的位置如图所示,那么代数式 $\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{c^2-2ac+a^2}$ 可以化简为

$A.-a-b+c$　　$B.a-b-c$

$C.-a-b-c$　　$D.a+b-c$



1题图

【解析】由图知

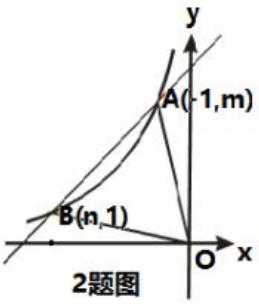
$b<c<a<0$,

故 $\sqrt{a^2}=|a|=-a,|a+b|=-(a+b),\sqrt{c^2-2ac+a^2}=|c-a|=a-c$

$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{c^2-2ac+a^2}=-a+(a+b)+(a-c)=a+b-c$,选 D.

2.反比例函数 $y=-\frac{4}{x}$ 的图象与直线 $y=-kx+b$ 交于 $A(-1,m),B(n,1)$ 两点,则△OAB 的面积为

$A.\frac{11}{2}$　　$B.4$　　$C.\frac{15}{2}$　　$D.\frac{13}{2}$



2题图

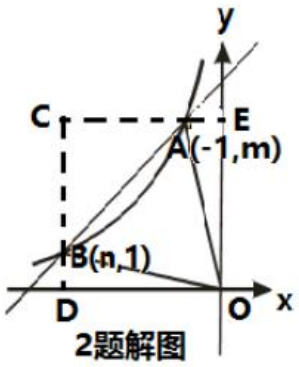
【解析】（补形）$\because xy=-4.A(-1,m)$ 代入:$-m=-4,\therefore m=4$;

$B(n,1)$ 代入:$n=-4$.故有 A（−1,4）,B（−4,1）.

作 $AE\perp y$ 轴于 E,$BD\perp x$ 轴于 D.可知:

△AOE≌△BOD.且 $S_{\Delta AOE}=S_{\Delta BOD}=\frac{1}{2}\times1\times4=2$.

延长 EA,DB 交于 C,则四边形 $CDOE$ 是边长为 4 的正方形,且 $S_{\square CDOE}=4^2=16$, △ABC 是腰长为 3 的等腰直角三角形,且 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times3^2=\frac{9}{2}$.



2题解图

于是△OAB 的面积为 $S_{\Delta ABC}=16-2\times2-\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$

3.设 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两根,则 $x_1^3-4x_2^2+15$ 等于

A.−4　　B.8　　C.6　　D.0

【解析】（降次）由韦达定理:$x_1+x_2=-1\Rightarrow x_1=-1-x_2.\because x_1^2+x_1=3,x_2^2+x_2=3$

$\therefore x_1^3-4x_2^2+15=x_1(3-x_1)-4(-1-x_1)^2+15=3x_1-x_1^2-4(1+2x_1+x_1^2)+15$

$=-5(x_1^2+x_1-3)-4=-4$,故选 *A*.

4.已知a,b,c分别是ΔABC的三边长,且满足$2a^4+2b^4+c^4-2a^2c^2+2b^2c^2$,则△*ABC* 是

A.等腰三角形　　B.等腰直角三角形

C.直角三角形　　D.等腰三角形或直角三角形

注:原题条件不完整（是代数式而不是条件等式）,故无法解出.为试卷完整起见,将原题条件调整为:

已知a,b,c分别是ΔABC的三边长,且满足$2a^4+2b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2=0$,则△*ABC* 是…

【解析】由条件得: $4a^4+4b^4+2c^4-4a^2c^2-4b^2c^2=0,$

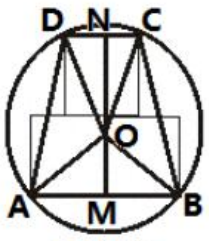
即$(2a^2-c^2)^2+(2b^2-c^2)^2=0,\therefore c^2=2a^2=2b^2$,或$a=b$且$a^2+b^2=c^2$.

故△*ABC* 是等腰直角三角形,选 *B*.

5.在一节 3 数学实践活动课上,老师拿出三个边长都为 40*mm* 的正方形硬纸板,他向同学们提出了这样一个问题:若将三个正方形纸板不重叠地放在桌面上,用一个圆形硬纸板将其盖住,这样的圆形硬纸板的

最小直径为（单位：*mm*）

A.$80\sqrt{2}$　　*B*.$40\sqrt{10}$　　*C*.$25\sqrt{17}$　　*D*.100



5题解图

【解析】当 3 个正方形按如图排列时,其外接圆直径最小.显然,这个圆是等腰梯形 *ABCD* 的外接圆 *O*,这里 *AB* // *CD* 且 *CD*=40,*AB*=80.

设此等腰梯形的对称轴交 *AB* 于 *M*,交 *CD* 于 *N*,则 *MN*=80.

∵*AB*>*CD*,∴*OM*<*ON*.设 *OM*=40−*x*,*ON*=40+*x*,圆半径为 *r*.

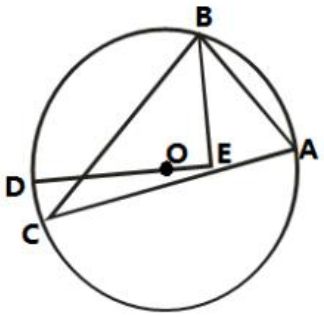
△*AOM* 中,$r^2=40^2+(40-x)^2$　　(1)

△*DON* 中,$r^2=20^2+(40+x)^2$　　(2)

（1）－（2）：$1200-160x=0,\therefore x=\frac{15}{2}$,代入（2）

$r^2=400+\frac{9025}{4}=\frac{10625}{4}=\frac{625\times17}{4},\therefore r=\frac{25}{2}\sqrt{17}.$

故所求最小圆的直径为$2r=25\sqrt{7}$,故选 *C*.

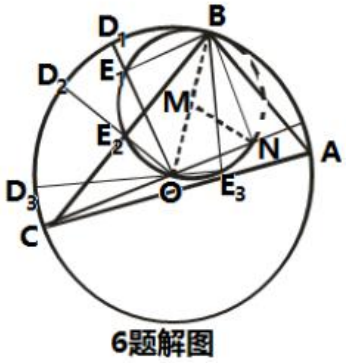


6题图

6.如图,△*ABC* 内接于圆 *O*,*BC*=36,∠*A*=60°,点 *D* 为 BC 上一动点,*BE*⊥直线 *OD* 于 *E*,当点 *D* 由 *B* 点沿 BC 运动到点 *C* 时,点 *E* 经过的路线长为

A.$12\sqrt{3}\pi$　　*B*.$8\sqrt{3}\pi$　　*C*.$27\sqrt{3}$　　*D*.54

【解析】（轨迹法）如解图,连结 *OB*,分别在 BC 上取 B,D_1,D_2,D_3,C, 其中 $OD_2\perp BC$,则相应的动点依次为 B,E_1,E_2,E_3,N.



6题解图

$\because\angle BE_1O=\angle BE_2O=\angle BE_3O=\angle BNO=90°$.故点 *E* 的轨迹是 *OB* 为直径的优弧 BE_2N.

已知 *BC*=36,$\therefore BE_2=18.\Delta BOE_2$ 是含 30°角的直角三角形,$\therefore$

$OB=12\sqrt{3}$.

设 *M* 为 *OB* 的中点（优弧圆心）,连 *MN*.则圆 *M* 的半径 *MB*=$6\sqrt{3}$.

注意到∠*BOC*=120°,$\therefore$∠*BON*=60°,∠*BMN*=120°, 优弧 BE_2N 之长为圆 *M* 周长的 $\frac{2}{3},\therefore l_{BE_2N}=\frac{2}{3}\times2\pi\cdot6\sqrt{3}=8\sqrt{3}\pi.$,故选 *B*.

二.填空题（7×7=49 分）

7.方程 $x^3+16=4x(x+1)$ 的所有根的和为_____

【解析 1】$x^3-4x^2-4x+16=0$.根据广义韦达定理,此方程 3 根之和为 4.

即 $\left(x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\text{这里}a=1,b=-4\right)$

【解析 2】由原方程得:$(x-4)(x+2)(x-2)=0,\therefore x_1=4,x_2=-2,$

$x_3=2.x_1+x_2+x_3=4$.

8.在 5 瓶饮料中,有 2 瓶已过了保质期,随机地从这 5 瓶饮料中取 2 瓶,取到至少有 1 瓶过保质期饮料的概率为_____

【解析】(正繁则反)由于从这 5 瓶饮料中任取 2 瓶,没有过期饮料的概率为 $\frac{3}{5}$,故取 2 瓶,取到至少有 1 瓶过保质期饮料的概率为 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

9.关于 x 的方程 $\frac{2a}{x-1}=a-1$ 无解,则 a 的值是_____

【解析】由原方程得: $2a=(a-1)(x-1)\qquad(1)$

关于 x 的方程(1)只有唯一解 $x=1$,代入(1)得 $a=0$,此时原方程无解;

又在方程(1)中令 $a=1$, 得 $a=0$.矛盾.此时方程(1)无解,从而原方程无解.

故若原方程无解,则必 $a=0$ 或 1.

10.一辆快车从甲地开往乙地,一辆慢车从乙地开往甲地,两车同时出发,分别以各自的速度在甲乙两地间匀速行驶,1 小时后,快车司机发现有重要文件遗忘在出发地,便立即返回拿上文件(取文件时间不计)后再从甲地开往乙地,结果快车先到达乙地.慢车继续行驶到甲地.设慢车行驶速度为 x(*h*),两车之间的距离为 y(*km*),y 与 x 的函数图象如图所示,则 $a=$_____

【解析】慢车 12.5 小时走完全程,

$12.5x=1000\Rightarrow x=80(km)$

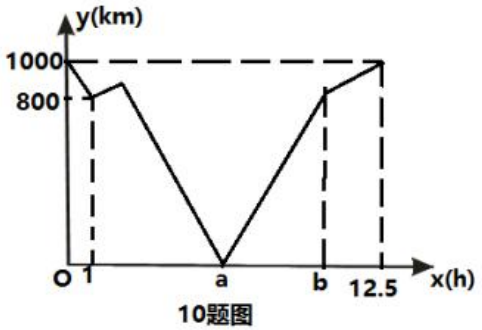
设快车速度为 t(*h*)

∵1 小时后两车相距 800*km*,即

1 小时两车共行 200*km*,

∴t=120*km*(*h*)

∵a 小时后两车相遇,此时慢车走 80*akm*,快车走 120(a−1) *km*,故有:



10题图

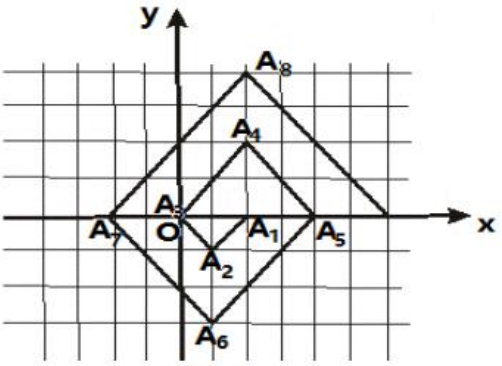
$80a+120(a-1)=1000\Rightarrow 200a=1120,\therefore a=5.6(h)$

11.已知 $a\geq 4$, 当 $1\leq x\leq 3$ 时,函数 $y=2x^2-3ax+4$ 的最小值为−23,则 $a=$_____

【解析】原式配方得: $y=2\left(x-\frac{3}{4}a\right)^2+\left(4-\frac{9}{8}a\right)$,抛物线开口向上且对称轴为 $x=\frac{3}{4}a$.当 $a\geq 4$ 时, $\frac{3}{4}a\geq 3$,故当 $1\leq x\leq 3$ 时,y 随 x 增大而减小.故当 x=3 时有:

$2\times3^2-3a\cdot3+4=-23\Rightarrow9a=45,\therefore a=5.$

12. 如图，在单位为 1 的正方形的网格纸上，$\Delta A_1A_2A_3,\Delta A_3A_4A_5,\Delta A_5A_6A_7,\cdots$，都是斜边在 x 轴上，且斜边长分别为 2,4,6,…的等腰直角三角形.若 $\Delta A_1A_2A_3$ 的顶点分别为 $A_1(2,0),A_2(1,-1),A_3(0,0)$，则依图中的规律，$A_{2015}$ 的坐标为_____



12题图

【解析】注意到点 $A_1,A_3,A_5,\cdots,A_{2n+1}$ 全在 x 轴上，设其横坐标依次为 $x_1,x_3,x_5,\cdots,x_{2015}$..

继续分析.点 A_{4n+1} 都在原点右边，其横坐标取正值，点 A_{4n-1} 都在原点左边（其中 A_3 为原点），其横坐标取 0 或负值（其中仅 A_3 横坐标为 0）.

∵2015=4×504－1，故 A_{2015} 必在原点左边，其横坐标必为负值.

易求 $x_3=x_{4\times1-1}=0,x_7=x_{4\times2-1}=0+(-2)\times1,x_{11}=x_{4\times3-1}=0+(-2)\times2=-4,\cdots$

$x_{2015}=x_{4\times504-1}=0+(-2)\times503=-1006$，故所求点 A 的坐标为：$A_{2015}(-1006,0)$.

13.有一张矩形风景画，长为 90cm，宽为 60cm，现对该风景画进行装裱，得到一个新的矩形，要求其长，宽之比与原风景画的长，宽之比相同，且面积比原风景画的面积大 44%.若装裱后的上，下边衬的宽都为 a cm，左，右边衬都为 b cm，那么 $ab=$

_____

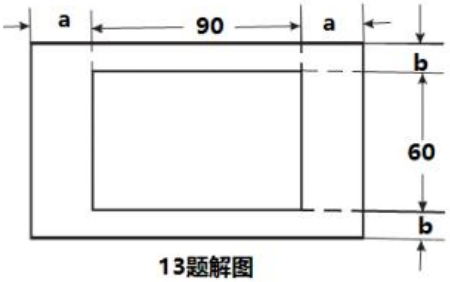
【解析】依题意有：

$\frac{90+2a}{60+2b}=\frac{90}{60}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2a}{2b}=\frac{3}{2}$（据等比定理）

故 $2a=3b\quad(1)$

又：$(90+2a)(60+2b)=90\times60\times\frac{144}{100}$

$\Rightarrow120a+180b+4ab=54\times44\quad(2)$



13题解图

（1）代入（2）：$60\cdot3b+180b+6b^2=54\times44\Rightarrow b^2+60b-396=0.$

解得：$b=6$或$b=-66$(舍)，从而 $a=9,\therefore ab=54.$

三.解答题

14.（14 分）已知 m,n 是方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根,

（1）求 $\left(m+5-\dfrac{16}{5-m}\right)\cdot\dfrac{2m-10}{3-m}-\dfrac{2}{m}$ 的值;

（2）求 $\sqrt{\dfrac{m^3}{n}}+\sqrt{\dfrac{n^3}{m}}$ 的值

【解析】（1）$\because m^2+3m+1=0$, 故

$$\left(m+5-\frac{16}{5-m}\right)\cdot\frac{2m-10}{3-m}-\frac{2}{m}=\frac{(m+5)(m-5)+16}{m-5}\cdot\frac{2(m-5)}{-(m-3)}-\frac{2}{m}$$

$$=-\frac{2(m^2-9)}{m-3}-\frac{2}{m}=-2(m+3)-\frac{2}{m}=-2\cdot\frac{m^2+3m+1}{m}=0.$$

（2）m,n 是方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根,$\therefore\begin{cases}m+n=-3\\ mn=1\end{cases}$

设 $x=\sqrt{\dfrac{m^3}{n}}+\sqrt{\dfrac{n^3}{m}}$,则 $x^2=\dfrac{m^3}{n}+\dfrac{n^3}{m}+2\sqrt{\dfrac{m^3}{n}\cdot\dfrac{n^3}{m}}=\dfrac{m^4+n^4}{mn}+2\sqrt{m^2n^2}$

$\because mn=1,\therefore x^2=\left(m^2+n^2\right)^2-2m^2n^2+2=\left[(m+n)^2-2mn\right]^2=(9-2)^2=49$

$\therefore x=7$,即 $\sqrt{\dfrac{m^3}{n}}+\sqrt{\dfrac{n^3}{m}}=7$.

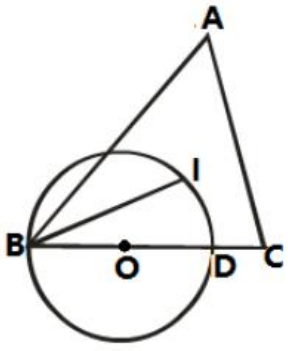
15.（15 分）如图,△ABC 中,$AC=BC$,I 为△ABC 的内心,O 为 BC 上一点,过 B,I 两点的圆 O 交 BC 于 D 点, $\tan\angle CBI=\dfrac{1}{3}$, $AB=6$,

（1）求线段 BD 的长;

（2）求线段 BC 的长

【解析】（1）如解图,I 为△ABC 内心,故 BI 平分 ∠ABC.设∠ABI=∠CBI=α.

连 CI,并延长交 AB 于 E,$\because CA=CB$,$\therefore CE\perp AB$,且 $AE=BE=3$.于是 $\mathrm{IE}=\mathrm{BE}\cdot\tan\alpha=3\times\dfrac{1}{3}=1$, $BI=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.



15题图

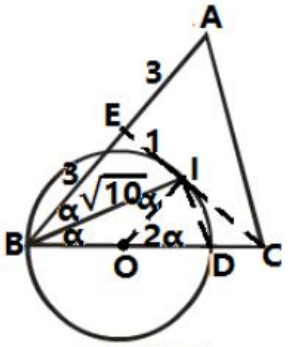
连 DI,∵ BD 为圆 O 的直径,∴ $\angle BID=90°$.于是

$$DI=BI\cdot\tan\alpha=\frac{\sqrt{10}}{3},BD=\sqrt{10+\frac{10}{9}}=\frac{10}{3}.$$

（2）连 OI,∵ $OI=OB=\frac{5}{3}$,∴ $\angle DOI=2\alpha$,故 $OI\parallel AB$,

$$\triangle COI\backsim\triangle CBE,\frac{OI}{BE}=\frac{CO}{CB}\Rightarrow\frac{\frac{5}{3}}{3}=\frac{CO}{CO+\frac{5}{3}}\Rightarrow\frac{5}{9}=\frac{3CO}{3CO+5},$$

$$\therefore CO=\frac{25}{12},BC=\frac{25}{12}+\frac{5}{3}=\frac{15}{4}.$$



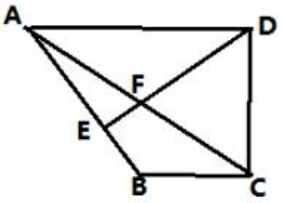
15题解图

16.（18 分）如图,四边形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$\angle BCD=90°$,$AD=6$,$BC=3$,$DE\perp AB$ 于 E,AC 交 DE 于 F,

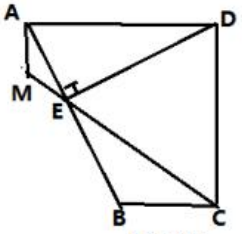
（1）求 $AE\cdot AB$ 的值;

（2）若 $CD=4$,求 $\frac{AF}{FC}$ 的值;

（3）若 $CD=6$,过 A 点作 $AM\parallel CD$,交 CE 的延长线于 M, 求 $\frac{ME}{EC}$ 的值.



16题图1



16题图2

【解析】（1）如解图 1,作 $AG\parallel BC$,交 CB 延长线于 G,则四边形 $AGCD$ 为矩形.

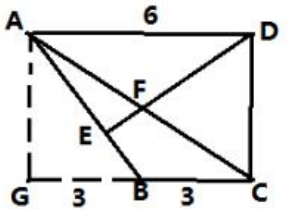
∴ $GC=AD=6$,但 $BC=3$,∴ $GB=3$.

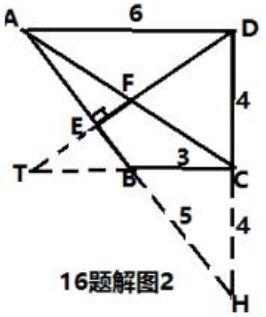
已知 $DE\perp AB$ 于 E,∴ $\triangle AGB\backsim\triangle DEA$.

于是 $\frac{AB}{AD}=\frac{BG}{AE}\Rightarrow AB\cdot AE=AD\cdot BG=18.$

（2）延长 AB,DC 交于 H.∵ $AD\parallel BC$,且 $AD=2BC$,∴ BC 为△AHD 的中位线,故 $CH=DC=4$.由勾股定理知 $AH=10$,$AB=BH=5$.

沿 DE,CB 交于 T,有△$AED\backsim$△BTE.





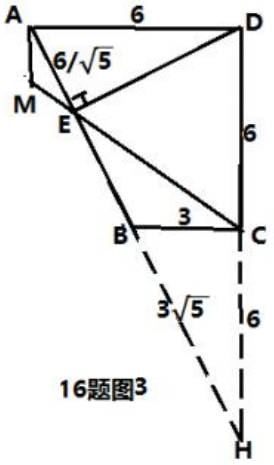
16题解图2

Rt△ADH 中,DE⊥AH,∴ $AE=\frac{AD^2}{AH}=\frac{36}{10}=\frac{18}{5}$,

$BE=AB-AE=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}$.于是

$\frac{BT}{AD}=\frac{BE}{AE}\Rightarrow\frac{BT}{6}=\frac{7/5}{18/5}=\frac{7}{18},\therefore BT=\frac{7}{3},CT=3+\frac{7}{3}=\frac{16}{3}$

由△AFD∽△CFT,知 $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{CT}=\frac{6}{16/3}=\frac{9}{8}$.



16题图3

（3）如解图 3 有 $AB=BH=3\sqrt{5}$,

$AE=\frac{36}{6\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}},\therefore EH=6\sqrt{5}-\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{24}{\sqrt{5}}$

$\because$△AEM∽△HEC,$\therefore\frac{ME}{EC}=\frac{AE}{EH}=\frac{6/\sqrt{5}}{24/\sqrt{5}}=\frac{1}{4}$.

17.(18 分)二次函数 $y=4x^2-2mx+n$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1,0),B(x_2,o)$ 两点$(x_1<x_2)$,

与 y 轴交于 c 点.

（1）若 AB=2,且抛物线的顶点在直线 y=−x−2 上,试确定 m,n 的值;

（2）在（1）中,若点 P 为直线 BC 下方抛物线上一点,当△PBC 的面积最大时,求 P 点坐标;

（3）是否存在整数 m,n,使得$1<x_1<2,1<x_2<2$, 同时成立?请证明你的结论.

【解析】（1）AB=2 $\Rightarrow x_2-x_1=2\Rightarrow (x_2+x_1)^2-4x_2x_1=4$.

由韦达定理:$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m}{2}\\ x_1x_2=\dfrac{n}{4}\end{cases}$,故有:$\dfrac{m^2}{4}-n=4$ (1)

抛物线的顶点为$\left(\dfrac{m}{4},\dfrac{4n-m^2}{4}\right)$,代入 $y=-x-2$:

$\dfrac{4n-m^2}{4}=-\dfrac{m}{4}-2\Rightarrow n=\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{m}{4}-2$ (2)代入（1）:

$2-\dfrac{m}{4}=0,\therefore m=8,$从而 $n=12$.

（2）在（1）的条件下,有： $y=4x^2-16x+12$

此抛物线的顶点为（2,−4）,交 x 轴于 A（1,0）,B（3,0）,交 y 轴于 C(0,12）

易求直线 BC 的解析式为 $y=-4x+12$.

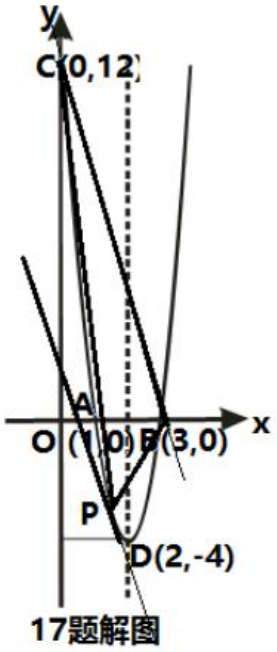
为使△PBC 面积最大,只需点 P 与直线 BC 距离最远.

设过 P 且平行于 BC 的直线解析式为 $y=-4x+b$,代入抛物线解析式;

$4x^2-16x+12=-4x+b\Rightarrow 4x^2-12x+12-b=0.$

令$\Delta=144-16(12-b)=0\Rightarrow 9=12-b,\therefore b=3$.此时有 $x=\dfrac{3}{2},y=-4\times\dfrac{3}{2}+3=-3.$

即所求点的坐标为 $P\left(\dfrac{3}{2},-3\right)$.



17题解图

（3）（反证法）假如存在这样的整数 m,n,使得方程 $4x^2-2mx+n=0$ 之 2 根满足

$1<x_1,x_2<2$.那么:$2<x_1+x_2=\dfrac{m}{2}<4,\therefore 4<m<8,m$为整数,$\therefore m=5,6,7;$ (1)

$1<x_1x_2=\dfrac{n}{4}<4,\therefore 4<n<16,n$为整数,$\therefore n=5,6,7,\cdots,15;$ (2)

$\Delta=4m^2-16n>0,\therefore n<\dfrac{m^2}{4}$ (3)

方程之 2 根为:$x=\dfrac{2m\pm\sqrt{4m^2-16n}}{8}=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4n}}{4}$

由

$$\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{4}>1\Rightarrow m-4>\sqrt{m^2-4n}\Rightarrow m^2-8m+16>m^2-4n\Rightarrow n>2m-4 \qquad (4)$$

由

$$\frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{4}<2\Rightarrow\sqrt{m^2-4n}<8-m\Rightarrow m^2-4n<64-16m+m^2\Rightarrow n>4m-16 \qquad (5)$$

当 m=5 时,$2m-4=6>4m-16=4$,根据（3），（4）,取 $2m-4<n<\frac{m^2}{4}$,即

$6<n<6\frac{1}{4}$,无整数解,舍去;

当 m=6 时, $2m-4=8=4m-16$, 根据（3），（4）,取 $2m-4<n<\frac{m^2}{4}$,即

$8<n<9$, 无整数解,舍去;

当 m=7 时, $2m-4=10<4m-16=12$. 根据（5），（4）,取 $4m-16<n<\frac{m^2}{4}$, 即 $12<n<12\frac{1}{4}$

无整数解,舍去.

据上分析,不存在整数 m,n,使得 $1<x_1<2,1<x_2<2$, 同时成立.