2014 上中答案

冲刺 17 年自主招生之

2014 年上中自主招生试卷

一、填空题

1. 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=$_____。

分析：$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=1$ ∴ $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-1$

2. 有_____个实数 x，可以使得 $\sqrt{120-\sqrt{x}}$ 为整数。

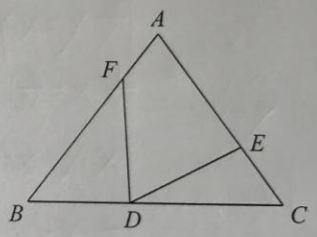
分析：$0^2\le\sqrt{120-\sqrt{x}}<11^2$ ∴ $120-\sqrt{x}=0$ 或 1 或 2 …… 或 10

∴ 共有 11 个 x

3. 如图，ΔABC 中，$AB=AC$，$CD=BF$，$BD=CE$，用含 $\angle A$ 的式子表示 $\angle EDF$，应为 $\angle EDF=$_____。

分析：$\triangle FBD\cong\triangle DCE$

$\therefore\angle EDF=\frac{180^\circ-\angle A}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$

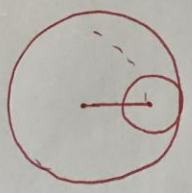


4. 在直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2(m>0)$ 与 x 轸交于 A、B 两点，若 A、B 两点到原点的距离分别为 OA、OB，且满足 $\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，则 m =_____。

分析：见二次函数(一)答案 $m=2$

5. 定圆 A 的半径为 72，动圆 B 的半径为 r，$r<72$ 且 r 是一个整数，动圆 B 保持内切于圆 A 且沿着圆 A 的圆周滚动一圈，若动圆 B 开始滚动时的切点与结束时的切点是同一点，则 r 共有_____11_____个可能的值。

分析：



圈数 $=\dfrac{\text{滚圆圆心所经路程}}{\text{滚圆的周长}}$　$72=2^3\times3^2$

$\therefore \dfrac{2\pi(72-r)}{2\pi r}$ 为整数　72的正约数个数

$\therefore r\mid 72-r$　为 $(3+1)\times(2+1)=12$ 个

$\therefore r\mid 72$　除去72

$\therefore r$ 共有11个值

6. 学生若干人租游船若干只，如果每船坐 4 人，就余下 20 人；如果每船坐 8 人，那么就有一船不空也不满，则学生共有_____人。

分析：设有 x 只船

$$\begin{cases} 8x>4x+20 \Rightarrow x>5 \\ 8(x-1)<4x+20 \Rightarrow x<7 \end{cases}$$

$\therefore x=6$

$4x+20=44$ 人

7. 对于各数互不相等的正数数组(a_1，a_2，…，a_n)(n 是不小于 2 的正整数)，如果在 $i<j$ 时有 $a_i>a_j$，则称 a_i 与 a_j 是该数组的一个“逆序”。例如数组(2，4，3，1)中有逆序“2，1”，“4，3”，“4，1”，“3，1”，其逆序数为 4，现若各数互不相同的正数数组(a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6)的逆序数为 2，则(a_6，a_5，a_4，a_3，a_2，a_1)的逆序数是_____。

分析：$(a_1,a_2\cdots a_6)$ 与 $(a_6\cdots a_1)$ 的逆序数和为 $C_6^2=15$ 个

$\therefore (a_6\,a_5\cdots a_1)$ 的逆序数为 $15-2=13$

8. 若 n 为正整数，则使得关于 x 的不等式 $\frac{11}{21}<\frac{n}{x+n}<\frac{10}{19}$ 有唯一的整数解的 n 的最大值为_____。

分析：$\begin{cases}11x+11n<21n\\10x+10n\geq 19n\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x<\frac{10}{11}n\\x>\frac{9}{10}n\end{cases}$

$\therefore \frac{10}{11}n-\frac{9}{10}n\leq 2$

$\therefore \frac{n}{110}\leq 2$

$n\leq 220$

当 $n=220$ 时 $x=199$ 符合题意

$\therefore n_{max}=220$

二、选择题

9. 已知 $x^2+ax-12$ 能分解成两个整系数的一次因式的积，则符合条件的整数 a 的个数为（C）

A.3　　B.4　　C.6　　D.8

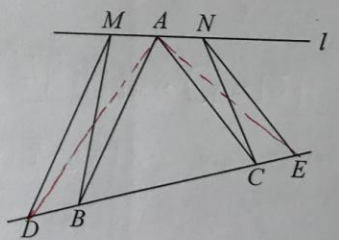
分析：$\begin{cases}x_1+x_2=-a\\x_1x_2=-12\end{cases}$

$-12=1\times(-12)=2\times(-6)=3\times(-4)$

$=(-1)\times 12=(-2)\times 6=(-3)\times 4$

$\therefore a$ 有6种情况

10. 如图，D、E 分别为 ΔABC 的底边所在直线上的两点，$DB=EC$，过 A 作直线 l，作 $DM\parallel BA$ 交 l 于 M，作 $EN\parallel CA$ 交 l 于 N。设 ΔABM 面积为 S_1，ΔACN 面积为 S_2，则（B）



A. $S_1>S_2$

B. $S_1=S_2$

C. $S_1<S_2$

分析：$S_1=S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ABD}$

$S_2=S_{\triangle ACN}=S_{\triangle ACE}$

$\because S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACE}$

$\therefore S_1=S_2$

11. 设 p_1，p_2，q_1、q_2 为实数，则 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$，若方程甲：$x^2+p_1x+q_1=0$，乙：$x^2+p_2x+q_2=0$，则（ C ）

A. 甲必有实根，乙也必有实根　　B. 甲没有实根，乙也没有实根
C. 甲、乙至少有一个有实根　　D. 甲、乙是否总有一个有实根不能确定

分析：$\Delta_1+\Delta_2=p_1^2+p_2^2-4q_1-4q_2$
$=p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)$
$=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2$
$=(p_1-p_2)^2\geq 0$

$\therefore \Delta_1,\Delta_2$ 中至少有1个大于等于0

$\therefore$ 答案为C

12. 设 $a=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{1007^2}{2013}$，$b=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{1007^2}{2015}$，则以下四个选项中最接近 $a-b$ 的整数为（　　）

A. 252　　B. 504　　C. 1007　　D. 2013

分析：见之前fm材料

选B

二、解答题

13. 直角三角形 ABC 和直角三角形 ADC 有公共斜边 AC（B、D 位于 AC 的两侧），M、N 分别是 AC、BD 中点，且 M、N 不重合。

(1)线段 MN 与 BD 是否垂直？证明你的结论；

(2)若 $\angle BAC=30°$，$\angle CAD=45°$，$AC=4$，求 MN 的长。

分析(1) $DM=BM=\frac{1}{2}AC$

$\because N$ 为 BD 的中点

$\therefore MN$ 垂直平分 BD（三线合一）

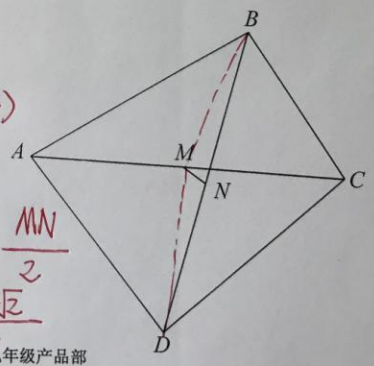
(2) $\angle DMB=2\angle DAB=150°$

$\therefore \angle MBN=15°$

$\sin 15°=\frac{MN}{BM}$

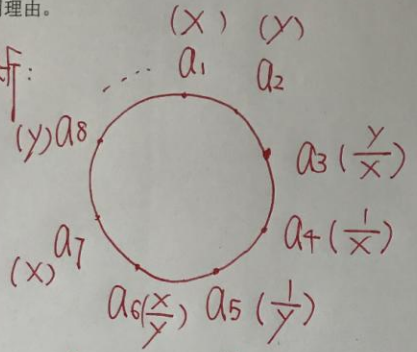
$\therefore \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{MN}{2}$

$MN=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$



14. 是否存在m个不全相等的正数a_1，a_2，…，a_m（$m\geqslant 7$），使得它们能合部被摆放在一个圆周上，每个数都等于其相邻两数的乘积？若存在，求出所有这样的m值；若不存在，说明理由。

分析：



设$a_1=x$，$a_2=y$，$a_3=\frac{y}{x}$，$a_4=\frac{1}{x}$，$a_5=\frac{1}{y}$，$a_6=\frac{x}{y}$，$a_7=x$，$a_8=y$——

∴周期为6

(1) 当$m\equiv 0\pmod 6$ $\begin{cases}a_1=a_2\cdot a_m\\ a_m=a_1\cdot a_{m-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\cdot\frac{x}{y}\\ \frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x\neq y\end{cases}$

(2) 当$m\equiv 1\pmod 6$ $\begin{cases}--\\ --\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\cdot x\\ x=x\cdot\frac{x}{y}\end{cases}\Rightarrow x=y=1$ ×

(3) 当$m\equiv 2\pmod 6$ $\begin{cases}--\\ --\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\cdot y\\ y=x\cdot x\end{cases}\Rightarrow x=y=1$ ×

(4) 当$m\equiv 3\pmod 6$ $\begin{cases}--\\ --\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\cdot\frac{y}{x}\\ \frac{y}{x}=x\cdot y\end{cases}\Rightarrow x=y=1$ ×

(5) 当$m\equiv 4\pmod 6$ $\begin{cases}--\\ --\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\cdot\frac{1}{x}\\ \frac{1}{x}=x\cdot\frac{x}{x}\end{cases}\Rightarrow x=y=1$ ×

(6) 当$m\equiv 5\pmod 6$ $\begin{cases}--\\ --\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\cdot\frac{1}{y}\\ \frac{1}{y}=x\cdot\frac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow x=y=1$ ×

综上 $m\equiv 0\pmod 6$且$m>7$.

学而思上海分校九年级产品部