14 复附（二）答案

冲刺 17 年自主招生之

2014 年复附自主招生试卷（二）

一、填空题

1. 实数 x,y,z 满足 $|2x-6|+|y+1|+\sqrt{(x-4)y^2}+x^2+z^2=2+2xz$，则 $x+y-z=$_____。

分析：本题 y 必须为非零实数

$|2x-6|+|y+1|+\sqrt{(x-4)y^2}+(x-z)^2=2$

$\because x-4\geq 0$

$\therefore 2x-6+|y+1|+\sqrt{(x-4)y^2}+(x-z)^2=2$

$\therefore 2(x-4)+|y+1|+\sqrt{(x-4)y^2}+(x-z)^2=0$

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$

$\therefore x+y-z=-1$

2. 若 $\frac{1001}{3}$ 的分子、分母同时加上正整数 n 时，该分数称为整数。这样的正整数 n 共有__个。

分析：$3+n\mid 1001+n$

$\therefore 3+n\mid 998$

$\because 998=2\times 499$

$\therefore 3+n=499$ 或 998

$\therefore n$ 共有 2 个

3. 已知 $a^2=7-3a, b^2=7-3b$，且 $a\neq b$，则 $\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}=$_____。

分析：a,b 为 $x^2+3x-7=0$ 的两根

$\therefore a+b=-3$

$ab=-7$

$\therefore$ 原式 $=\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=\frac{(a+b)[(a+b)^2-3ab]}{(ab)^2}=\frac{(-3)\times(9+21)}{49}=-\frac{90}{49}$

4. 设 p 是奇数，则方程 $2xy=p(x+y)$ 满足 $x<y$ 的正整数解是_____。

分析：$2xy-p(x+y)=0$

$x(2y-p)-\frac{p}{2}(2y-p)=\frac{p^2}{2}$

$(2x-p)(2y-p)=p^2$

$\because 0<x<y$

$\therefore 2x-p<2y-p$

$\therefore \begin{cases} 2x-p=1 \\ 2y-p=p^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x-p=-p^2 \\ 2y-p=1 \end{cases}$（舍）

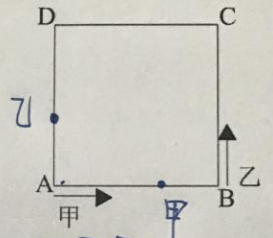
$\therefore \begin{cases} x=\frac{p+1}{2} \\ y=\frac{p^2+p}{2} \end{cases}$

5. 方程 $x=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的解为_____。

分析：数形结合或换元思想

见材料方程与方程组 答案 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

8. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为100米，甲、乙两个动点分别从 A 点和 B 点同时出发按逆时针方向移动。甲的速度是7米/秒，乙的速度是10米/秒。经过__70__秒，甲、乙两动点第一次位于正方形的同一条边上。



分析：追及问题

$0\leq(\sqrt{甲}t+300-\sqrt{乙}t)\leq100$

$\therefore 0\leq300-3t\leq100$

$\frac{200}{3}\leq t\leq100$

$\therefore$ 当 $t=\frac{200}{3}$ 时，第一次两人相离100米

此时，如图所示，

当乙走到A时 $t=\frac{700}{10}=70S$ 时

9. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，动点 P,Q,R 分别同时从顶点 A,B,C 出发，沿 AB,BC,CA 按逆时针方向以各自的速度匀速移动，且 P,Q,R 经过 $\triangle ABC$ 的一边所用时间分别为1秒，2秒，3秒。从运动开始起，在1秒内，经过_____秒 $\triangle PQR$ 的面积取到最小值。

分析：见材料三角形(一)答案

$t=\frac{11}{12}S$

10. 二次函数 $f(x)$ 的图像开口向上，与 x 轴交于 A,B 两点，与 y 轴交于点 C，以 D 为顶点，若三角形 ABC 的外接圆与 y 轴相切，且 $\angle DAC=150°$，则 $x\neq 0$ 时，$\frac{f(x)}{|x|}$ 的最小值是

分析：本题难度较大

见材料二次函数(二)答案

$\left(\frac{f(x)}{|x|}\right)_{min}=2-\frac{4}{3}\sqrt{3}$

二、解答题

11. 已知 a 是正常数，且关于 x 的方程 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=\frac{\sqrt{ax}}{x^2-3x+2}$ 仅有一个实数根，求实数 a 的取值范围。

分析：$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}=\frac{\sqrt{ax}}{x^2-3x+2}$

$2x-3=\sqrt{ax}\quad (x\geq\frac{3}{2})$

$4x^2-12x+9=ax$

$4x^2-(12+a)x+9=0$

1° 方程两根相等

$\Delta=(12+a)^2-144=0$

$\therefore a=0$ 或 -24（舍去）

2° 方程有一根为2

则 $2\cdot x_0=\frac{9}{4}$

$x_0=\frac{9}{8}$（增根，舍）

3° 方程有一根为1

$1\cdot x_0=\frac{9}{4}$

$x_0=\frac{9}{4}$

此时 $\frac{9}{4}+1=\frac{12+a}{4}$

$a=1$

符合题意

4° $\Delta>0$ 两根为正

$\Delta=(12+a)^2-144>0$

$a>0$ 或 $a<-24$

$\therefore a>0$

此时一根大于 $\frac{3}{2}$，一根小于 $\frac{3}{2}$

符合题意

$\therefore a>0$

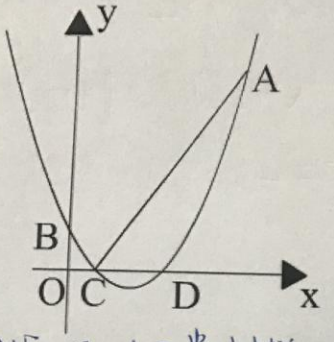
综上：$a>0$

12. 如图，抛物线的顶点坐标是$\left(\frac{5}{2},-\frac{9}{8}\right)$，且经过点$A(8,14)$。

(1) 求该抛物线的解析式；

(2) 设该抛物线与y轴相交于点B，与x轴相交于C、D两点(点C在点D的左边)，求点B、C、D的坐标；

(3) 设点P是x轴上的任意一点，分别连结AC、BC。比较$PA+PB$与$AC+BC$的大小关系，说明理由。



分析：见二次函数材料(二)答案

(1). $f(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{8}$

(2) B(0,2) C(1,0) D(4,0)

(3) $PA+PB \geq BC+AC$