2013 年上中答案

学而思培优

冲刺 17 年自主招生之

2013 年上中自主招生试卷

一、填空题

1. 计算 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=$_____。

分析：分母有理化+裂项　原式=$\sqrt{2013}-1$

2. 设 x,y,z 为整数且满足 $|x-y|^{2012}+|y-z|^{2013}=1$，则代数式 $|x-y|^3+|y-z|^3+|z-x|^3$ 的值为_____。

分析：整数解+绝对值　原式=2

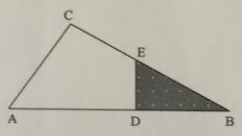
3. 若有理数 a,b 满足 $\sqrt{\frac{21}{4}-3\sqrt{3}}=a+\sqrt{b}$，则 $a+b=$_____。

分析：重根式的化简　原式=$\sqrt{3}-\frac{3}{2}$　$\therefore a+b=\frac{3}{2}$

4. 如图，$\triangle ABC$ 中，AC=3，BC=4，AB=5，线段 DE⊥AB，且 $\triangle BDE$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的三分之一，那么，线段 BD 长为_____。

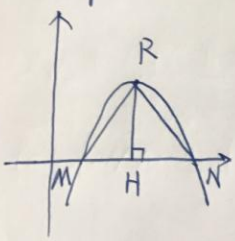
分析：余A相似

$BD=\frac{4}{3}\sqrt{3}$



5. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有两个交点 M、N，顶点为 R，若 $\triangle MNR$ 恰好是等边三角形，则 $b^2-4ac=$_____。

分析：二次函数+等边△



不妨设 $a<0$

$MN=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

$RH=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}$

$RH=\frac{\sqrt{3}}{2}MN$

$\therefore -\frac{\Delta}{4a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{\sqrt{\Delta}}{a})$

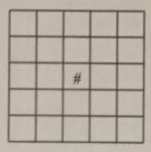
$\therefore \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$

$\Delta=12$

6. 如图为25个小正方形组成的5×5棋盘，其中含有符号"#"的各种正方形共有_____个。

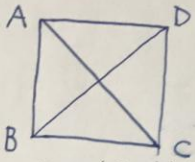
分析：计数分析

共1+4+9+4+1=19个



7. 平面上有n个点，其中任意三点都是直角三角形的顶点，则n的最大值为_____。

分析：估界构造　　$n=4$时成立



若$n\geq 5$，不妨设$n=5$，设另一点为E

1°当E在外侧时，×

2°当E在边上时　×

3°当E在内侧时　×

$\therefore n_{max}=4$

8. 若方程$(x^2-1)(x^2-4)=k$有四个非零实根，且它们在数轴上对应的四个点等距排列，则实数$k=$_____。

分析：换元+韦达定理

见"指数"直接想到方程与方程组"答案"

$k=\frac{7}{4}$

9. 一个老人有n匹马，他把马全部分给两个儿子，大儿子得x匹，小儿子得y匹，$(x>y\geq 1)$，并且满足x是$n+1$的约数，y也是$n+1$的约数，则正整数n共有_____种可能的取值?

分析：整除

$$\begin{cases} x+y=n\ (x>y\geq 1) \\ x\mid n+1 \\ y\mid n+1 \end{cases}$$

$\therefore x\mid x+y+1$

$\therefore x\mid y+1$

同理$y\mid x+1$

$\because x>y$

$\therefore x\geq y+1$

又$\because x\mid y+1$

$\therefore x=y+1$

$\therefore y\mid y+2$

$\therefore y\mid 2$

$\therefore y=1$或2

1°当$y=1$时　$x=2$

$n=3$

2°当$y=2$时　$x=3$

$\therefore n=5$

$\therefore n$有2种取值

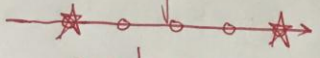
10. 已知 $a>0$，且不等式 $1<ax<2$ 恰有三个正数解，则当不等式 $2<ax<3$ 含有最多的整数解时，正数 a 的取值范围为_____。

分析：$1<ax<2$

$\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}$

区间长度 $\frac{2}{a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

有3个整数解



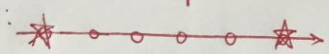
$2<\frac{1}{a}\leq 4$

$2<ax<3$

$\therefore \frac{2}{a}<x<\frac{3}{a}$

区间长度 $2<\frac{3}{a}-\frac{2}{a}=\frac{1}{a}\leq 4$

故最多有4个解



$\therefore 3<\frac{1}{a}\leq 5$

综上：$3<\frac{1}{a}\leq 4$

分类讨论：

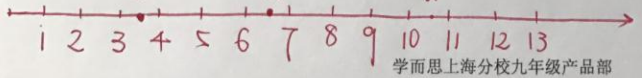
① 当 $\frac{1}{a}=4$ 时 $\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

$2<ax<3$

即 $2<\frac{1}{4}x<3$

$8<x<12$ 有3个整数解，不合题意，舍

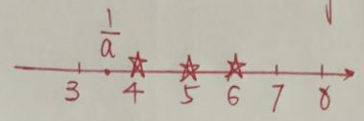
② 当 $3<\frac{1}{a}<4$ 时 此时 $6<\frac{2}{a}<8$ $9<\frac{3}{a}<12$



若 $3<\frac{1}{a}<4$ 时

$\therefore \frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}$ 只有3个整数解

$\therefore$



$\therefore 6<\frac{2}{a}\leq 7$

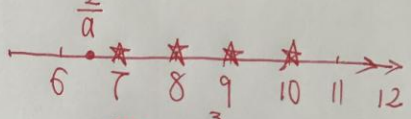
(1) 当 $\frac{2}{a}=7$ 时 $a=\frac{2}{7}$

$2<\frac{2}{7}x<3$

$7<x<10.5$ 有3个整数解

不合题意

(2) 当 $6<\frac{2}{a}<7$ 时



需 $10<\frac{3}{a}\leq 11$

$\therefore \begin{cases} 6<\frac{2}{a}<7 \Rightarrow \frac{2}{7}<a<\frac{1}{3} \\ 10<\frac{3}{a}\leq 11 \Rightarrow \frac{3}{11}\leq a<\frac{3}{10} \end{cases}$

综上 $\frac{2}{7}<a<\frac{3}{10}$

二、解答题

11. 设方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根为 a,b，求满足 $f(a)=b, f(b)=a, f(1)=1$ 的二次函数 $f(x)$。

分析：韦达定理

观察有题型补充材料二次函数(=)

$f(x)=-x^2+2$

12. 已知 $1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$，这里 n 为任意正整数，请你利用恒等式 $(n+1)^3=n^3+2n^2+3n+1$，推导出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的计算公式。

分析：$(1+1)^3=1^3+3\times1^2+3\times1+1$ ①

$(2+1)^3=2^3+3\times2^2+3\times2+1$ ②

- - - - -

$(n+1)^3=n^3+3\times n^2+3\times n+1$ ⑪

①+②+…+⑪

$\therefore 2^3+\cdots+(n+1)^3=1^3+\cdots+n^3+3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times(1+\cdots+n)+n$

化简：$\times=\dfrac{(n+1)n(2n+1)}{6}$

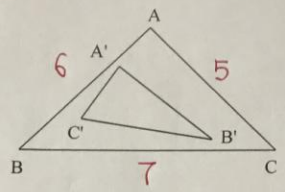
(设 $\times=1^2+2^2+\cdots+n^2$)

13. 解方程组 $\begin{cases}x^2=1+(y-z)^2\\ y^2=2+(z-x)^2\\ z^2=3+(x-y)^2\end{cases}$

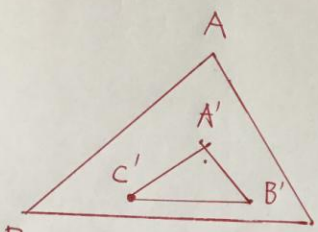
分析：观方程与方程组

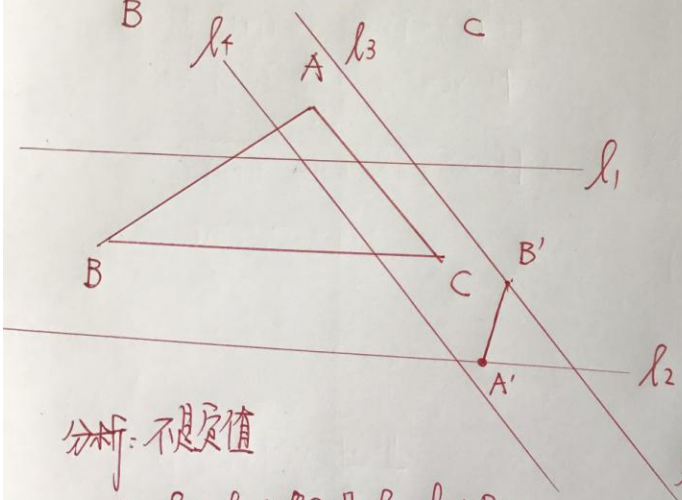
$\begin{cases}x=\frac{5}{12}\sqrt{6}\\ y=\frac{2}{3}\sqrt{6}\\ z=\frac{3}{4}\sqrt{6}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{5}{12}\sqrt{6}\\ y=-\frac{2}{3}\sqrt{6}\\ z=-\frac{3}{4}\sqrt{6}\end{cases}$

14. 已知$\triangle ABC$，CA=5，AB=6，BC=7，$\triangle A'B'C'$中，$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$，但$\triangle A'B'C'$的大小和位置不定，当A'到BC的距离为3，B'到AC的距离为1（如图），问：C'到AB的距离是否定值？若是，求出此定值；若不是，说明理由。



一、





分析：不是定值

作 $l_1 // l_2 // BC$ 且 l_1，l_2 与 BC 之间的距离为 3

作 $l_3 // l_4 // AC$ 且 l_3，l_4 与 AC 距离为 1

则 A' 在 l_1，l_2 上

B' 在 l_3，l_4 上

在当中任取 A'，B' 点，显然 C' 的位置是不固定的