11 年华二答案

冲刺 17 年自主招生之

2011 年华二自主招生试卷

一、填空题（每题 4 分）

1．已知关于 x 的多项式 $ax^7+bx^5+x^2+x+12$（a、b 为常数），且当 $x=2$ 时，该多项式的值为 -8，则当 $x=-2$ 时，该多项式的值为_____.

分析：代数值求值之整体替换　原式=40

2．已知关于 x 的方程 $x^2+(a-2)x+a+1=0$ 的两实根 x_1、x_2 满足 $x_1^2+x_2^2=4$，则实数 $a=$_____.

分析：韦达定理：　$\Delta=3-\sqrt{11}$

3．已知当船位于处 A 时获悉，在其正东方向相距 10 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救，甲船立即前往救援，同时把消息告知在甲船的南偏西 30°，相距 10 海里 C 处的乙船，试问乙船应该朝北偏东_____度的方向沿直线前往 B 处救援.

分析：方向角问题　60°

4．关于 x、y 的方程组 $\begin{cases} x^{x-y}=y^{x+y} \\ y\sqrt{x}=1 \end{cases}$ 有_____组解.

分析：特殊方程组求解　答：2组解

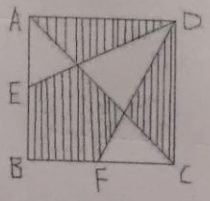
5．已知 a，b，c 均大于零，且 $a^2+2ab+2ac+4bc=20$ 则 $a+b+c$ 的最小值是_____.

分析：代数式的恒等变形　答：$2\sqrt{5}$

6．已知二次函数 $y=2x^2-px+5$，当 $x\geq -2$ 时，y 的值随 x 的值增加而增加，那么 $x=p$ 对应的 y 值的取值范围是_____.

分析：二次函数的增减性　$p\geq -8$

7．如图所示，正方形 $ABCD$ 的面积设为 1，E 和 F 分别是 AB 和 BC 的中点，则图中阴影部分的面积是_____.



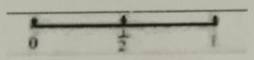
分析：8字型相似＋面积转化

答：$\frac{2}{3}$

8．在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$AB=16$，对角线 AC 与交 BD 于点 E，过 E 作 $EF\perp AB$ 于点 F，O 为边 AB 的中点，且 $FE+EO=8$，则 $AD+BC$ 的值为_____.

分析：代数式的变形　$AD+BC=16$

9. 以下是面点师一个工作环节的数学模型：如图，在数轴上截取从 0 到 1 对应的线段，对折后（坐标 1 所对应的点与原点重合）再均匀地拉成 1 个单位长度的线段，这一过程称为一次操作（例如在第一次操作完成后，原来的坐标 $\frac{1}{4},\frac{3}{4}$ 变成 $\frac{1}{2}$，原来的 $\frac{1}{2}$ 变成 1，等等），那么原数轴从 0 到 1 对应的线段上（除两个端点外）的点，在第 n 次操作完成后（$(n\geq 1)$），恰好被拉到与 1 重合的点所对应的坐标为_____.



分析：找规律.

$\frac{k}{2^n}$（$k\in[1,2^n]$ 中的奇数）

10. 定义 $\min\{a,b,c\}$ 表示实数 a,b,c 中的最小值，若 x,y 是任意正实数，则 $M=\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}$ 的最大值是_____.

分析：不等式 答：2

二、计算题（20 分）

11. 四个不同的三位整数的首位数字相同，并且它们的和能被它们中的三个数整除，求这些数.（10 分）

分析：整除

设这4个数分别为A.B.C.D 和为S

A|S B|S C|S 设A<B<C

$S\div A=k_1$ $S\div B=k_2$ $S\div C=k_3$

$\therefore k_1>k_2>k_3$ 且为整数

若 $k_1>6$，不妨设 $k_1=7$ $S=7A$

$\therefore A=\frac{1}{7}S$

$\therefore B+C+D=\frac{6}{7}S$

$\therefore$ B.C.D 中至少有一个为 $\frac{2}{7}S$

与 A.B.C.D 首位相同矛盾

若 $k_3<3$ 设 $k_3=2$

$\therefore C=\frac{1}{2}S$

$A+B+D=\frac{1}{2}S$

$\therefore$ A.B.D 中至少有一个不对 $\frac{1}{6}S$，矛盾

$\therefore 3\leq k_3<k_2<k_1\leq 6$

$\therefore k_1,k_2,k_3$ 为6,5,4 或 5,4,3

1° $k_1=6$ $k_2=5$ $k_3=4$ 时

$A=\frac{S}{6}$ $B=\frac{S}{5}$ $C=\frac{S}{4}$ $D=\frac{23}{60}S$

与 A.B.C.D 首位数字相同矛盾

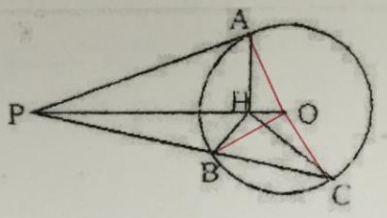
2° $k_1=5$ $k_2=4$ $k_3=3$ 时

$A=\frac{S}{5}$ $B=\frac{S}{4}$ $C=\frac{S}{3}$ $D=\frac{13}{60}S$

设 A=12K B=15K C=20K D=13K

$\therefore$ A=108 B=135 C=180 D=117

12. 如图，已知 PA 切⊙ O 于 A，$\angle APO=30^\circ$，$AH\perp PO$ 于 H，任作割线 PBC 交⊙ O 于点 B、C，计算 $\dfrac{HC-HB}{BC}$ 的值.（10 分）



分析：法一：托勒密定理

$PA^2=PH\cdot PO$

$PA^2=PB\cdot PC$

$\therefore PH\cdot PO=PB\cdot PC$

$\therefore H,B,C,O$ 四点共圆

$\therefore OH\cdot BC+BH\cdot OC=OB\cdot CH$

$OH\cdot BC+BH\cdot r=r\cdot CH$

$OH\cdot BC=(HC-HB)\cdot r$

$\therefore \dfrac{HC-HB}{BC}=\dfrac{OH}{r}=\dfrac{OH}{OA}=\dfrac{1}{2}$

法二：圆幂定理＋相似

$PA^2=PH\cdot PO$，$PA^2=PB\cdot PC$

$\therefore PH\cdot PO=PB\cdot PC$

$\therefore \triangle PBH\backsim\triangle POC$

$\therefore \dfrac{HB}{OC}=\dfrac{PH}{PC}=\dfrac{PB}{PO}$ ①

$OA^2=OH\cdot OP$，$OC^2=OH\cdot OP$

$\therefore \triangle COH\backsim\triangle POC$

$\therefore \dfrac{HC}{PC}=\dfrac{OH}{OC}=\dfrac{OC}{OP}$ ②

$\therefore$ 由①得 $\dfrac{HB}{OC}=\dfrac{PB}{OP}$

由②得 $\dfrac{HC}{OC}=\dfrac{PC}{OP}$

$\therefore \dfrac{HC-HB}{OC}=\dfrac{PC-PB}{OP}=\dfrac{BC}{OP}$

$\therefore \dfrac{HC-HB}{BC}=\dfrac{OC}{OP}=\dfrac{OA}{OP}=\dfrac{1}{2}$