

北京市海淀区 2015-2016 学年高一上学期期末数学试卷

一、选择题：本大题共 8 小题，共 32 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$ ， $B = \{x | x \geq 1\}$ ，则 $A \cap B =$ ().

A. $(1, 2)$ B. $[-1, 2]$ C. $[-1, 1]$ D. $[1, 2)$

2. $\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$ 的值为 ().

A. 1 B. -1 C. 0 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 若 α 是第二象限的角， $P(x, 6)$ 为其终边上的一点，且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ，则 $x =$ ().

A. -4 B. ± 4 C. -8 D. ± 8

4. 化简 $\sqrt{1 - \sin^2 160^\circ} =$ ().

A. $\cos 20^\circ$ B. $-\cos 20^\circ$ C. $\pm \cos 20^\circ$ D. $\pm |\cos 20^\circ|$

5. 已知 $A(1, 2)$ ， $B(3, 7)$ ， $\vec{a} = (x, -1)$ ， $\overrightarrow{AB} // \vec{a}$ ，则 ().

A. $x = \frac{2}{5}$ ，且 \overrightarrow{AB} 与 \vec{a} 方向相同 B. $x = -\frac{2}{5}$ ，且 \overrightarrow{AB} 与 \vec{a} 方向相同

C. $x = \frac{2}{5}$ ，且 \overrightarrow{AB} 与 \vec{a} 方向相反 D. $x = -\frac{2}{5}$ ，且 \overrightarrow{AB} 与 \vec{a} 方向相反

6. 已知函数：① $y = \tan x$ ，② $y = \sin |x|$ ，③ $y = |\sin x|$ ，④ $y = |\cos x|$ ，其中周期为 π ，且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增的是 ().

A. ①② B. ①③ C. ①②③ D. ①③④

7. 先把函数 $y = \cos x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)，得到的函数图象的解析式为 ().

A. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ B. $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ C. $y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ D. $y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

8. 若 m 是函数 $f(x) = \sqrt{x} - 2^x + 2$ 的一个零点, 且 $x_1 \in (0, m)$, $x_2 \in (m, +\infty)$, 则 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(m)$ 的大小关系为 () .

A. $f(x_1) < f(m) < f(x_2)$ B. $f(m) < f(x_2) < f(x_1)$
C. $f(m) < f(x_1) < f(x_2)$ D. $f(x_2) < f(m) < f(x_1)$

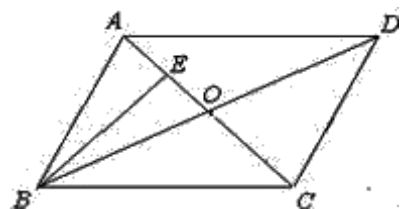
二. 填空题: 本大题共 6 小题, 每空 4 分, 共 24 分. 把答案填写在题中横线上.

9. 若 $y = \log_2 x > 1$, 则 x 的取值范围是_____.

10. 若函数 $f(x) = x^2 + 3x - 4$ 在 $x \in [-1, 3]$ 上的最大值和最小值分别为 M , N , 则 $M + N =$ _____.

11. 若向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 且 $m\vec{a} + n\vec{b} = (5, -5)$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 则 $m - n$ 的值为_____.

12. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, AC , BD 相交于点 O , E 为线段 AO 的中点, 若 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda + \mu =$ _____.



13. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$ (其中 $\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增, 且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, $f(0) = -1$, 则 $\omega =$ _____.

14. 已知函数 $y = f(x)$, 若对于任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(2x) = 2f(x)$ 恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 具有性质 P ,

(1) 若函数 $f(x)$ 具有性质 P , 且 $f(4) = 8$, 则 $f(1) =$ _____.

(2) 若函数 $f(x)$ 具有性质 P , 且在 $(1, 2]$ 上的解析式为 $y = \cos x$, 那么 $y = f(x)$ 在 $(1, 8]$ 上有且仅有_____个零点.

三. 解答题: 本大题共 4 小题, 共 44 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. 已知二次函数 $f(x) = x^2 + mx - 3$ 的两个零点为 -1 和 n ,

(I) 求 m, n 的值;

(II) 若 $f(3) = f(2a-3)$, 求 a 的值.

16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x) = 2^x - 1$,

(I) 求当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式;

(II) 若 $f(a) \leq 3$, 求 a 的取值范围.

17. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间与对称轴方程;

(II) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值与最小值.

18. 如果 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $f(-x) \neq -f(x)$, 则称该函数是“ X - 函数”.

(I) 分别判断下列函数: ① $y = 2^x$; ② $y = x + 1$; ③ $y = x^2 + 2x - 3$ 是否为“ X - 函数”? (直接写出结论)

(II) 若函数 $f(x) = \sin x + \cos x + a$ 是“ X - 函数”, 求实数 a 的取值范围;

(III) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in A \\ x, & x \in B \end{cases}$ 是“ X - 函数”, 且在 \mathbf{R} 上单调递增, 求所有可能的集合 A 与 B .

北京市海淀区 2015-2016 学年高一（上）期末数学试卷参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	B	C	A	D	B	B	D

二、填空题

9. $(2, +\infty)$

10. 8

11. -2

12. $\frac{3}{4}$

13. 2

14. 2, 3

三、解答题：本大题共 4 小题，共 44 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.

（I）因为二次函数 $f(x) = x^2 + mx - 3$ 的两个零点为 -1 和 n ,

所以, -1 和 n 是方程 $x^2 + mx - 3 = 0$ 的两个根.

则 $-1 + n = -m$, $-1 \times n = -3$,

所以 $m = -2$, $n = 3$.

（II）因为函数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 的对称轴为 $x = 1$.

若 $f(3) = f(2a - 3)$,

则 $\frac{3 + 2a - 3}{2} = 1$ 或 $2a - 3 = 3$,

得 $a = 1$ 或 $a = 3$.

综上, $a = 1$ 或 $a = 3$.

16. 解：（I）当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $f(-x) = 2^{-x} - 1$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$.

所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = -f(-x) = -2^{-x} + 1$.

(II) 因为 $f(a) \leq 3$, $f(2) = 3$,

所以 $f(x) \leq f(2)$.

又因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是单调递增函数,

所以 $a \leq 2$.

17. (I) $\because f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 可得 $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}$,

\therefore 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$,

由 $2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 可得 $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$

$\therefore f(x)$ 的对称轴方程为 $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$;

(II) $\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$,

$\therefore \frac{1}{2} \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$,

\therefore 当 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ 即 $x = 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 -1 ,

当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 的最大值为 2 .

18. (I) ①、②是“ X -函数”, ③不是“ X -函数”;

(II) 由题意, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) \neq -f(x)$, 即 $f(-x) + f(x) \neq 0$;

因为 $f(x) = \sin x + \cos x + a$,

所以 $f(-x) = -\sin x + \cos x + a$,

故 $f(x) + f(-x) = 2\cos x + 2a$;

由题意, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $2\cos x + 2a \neq 0$, 即 $a \neq -\cos x$;

又 $\cos x \in [-1, 1]$,

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (1, -\infty)$;

(III) (1) 对任意的 $x \neq 0$,

(i) 若 $x \in A$ 且 $-x \in A$, 则 $-x \neq x$, $f(-x) = f(x)$,

这与 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增矛盾, (舍去),

(ii) 若 $x \in B$ 且 $-x \in B$, 则 $f(-x) = -x = -f(x)$,

这与 $y = f(x)$ 是“ X -函数”矛盾, (舍去);

此时, 由 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

故对任意的 $x \neq 0$, x 与 $-x$ 恰有一个属于 A , 另一个属于 B ;

(2) 假设存在 $x_0 < 0$, 使得 $x_0 \in A$, 则由 $x_0 < \frac{x_0}{2}$, 故 $f(x_0) < f\left(\frac{x_0}{2}\right)$;

(i) 若 $\frac{x_0}{2} \in A$, 则 $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = \frac{x_0^2}{4} + 1 < x_0^2 + 1 = f(x_0)$, 矛盾,

(ii) 若 $\frac{x_0}{2} \in B$, 则 $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = \frac{x_0^2}{2} < 0 < x_0^2 + 1 = f(x_0)$, 矛盾;

综上, 对任意的 $x < 0$, $x \notin A$, 故 $x \in B$, 即 $(-\infty, 0) \subseteq B$, 则 $(0, +\infty) \subseteq A$;

(3) 假设 $0 \in B$, 则 $f(-0) = -f(0) = 0$, 矛盾, 故 $0 \in A$;

故 $A = [0, +\infty)$, $B = (-\infty, 0]$;

经检验 $A = [0, +\infty)$, $B = (-\infty, 0]$, 符合题意.

北京市海淀区 2015-2016 学年高一上学期期末数学试卷

1. 【答案】D

【解析】利用交集定义求解.

2. 【答案】B

【解析】原式 $= -\sin \frac{9\pi}{2} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$.

3. 【答案】C

【解析】 $\because \alpha$ 是第二象限的角, $P(x, 6)$ 为其终边上的一点,且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\therefore \frac{6}{\sqrt{x^2 + 6^2}} = \frac{3}{5}, \quad x < 0,$ 解得 $x = -8$.

4. 【答案】A

【解析】 $\because \cos 20^\circ > 0$, \therefore 原式 $= \sqrt{1 - \sin^2 20^\circ} = |\cos 20^\circ| = \cos 20^\circ$.

5. 【答案】D

【解析】 $A(1, 2), B(3, 7)$,可得 $\overrightarrow{AB} = (x, -1)$, $\vec{a} = (x, -1), \overrightarrow{AB} // \vec{a}$,可得 $5x = -2$, 解得 $x = -\frac{2}{5}$. $\vec{a} = \left(-\frac{2}{5}, -1\right)$, 与 \overrightarrow{AB} 方向相反.

6. 【答案】B

【解析】① 函数 $y = \tan x$ 中 $\omega = 1$, 故周期 $T = \pi$; 因为利用正切函数图像可得在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以 A 正确;② $y = \sin|x|$ 为偶函数, 根据图像判断它不是周期函数.③ 由于函数 $y = |\sin x|$ 周期为 π , 利用正弦函数的图像可得在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故正确;④ $y = |\cos x|$ 是周期为 π 的三角函数, 利用余弦函数的图像可得在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 故不正确.

7. 【答案】B

【解析】将函数 $y = \cos x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,

可得函数 $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像,

再将所得图像的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变),

可得到的函数 $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像.

8. 【答案】D

【解析】 $\because m$ 是 $f(x) = \sqrt{x} - 2^x + 2$ 得到一个解,

$\therefore m$ 是方程 $\sqrt{x} - 2^x + 2 = 0$ 的一个解,

$\therefore m$ 是函数 $g(x) = \sqrt{x}$ 与 $h(x) = 2^x - 2$ 图像的一个交点的横坐标,

若 $x_1 \in (0, m)$, $x_2 \in (m, +\infty)$,

则 $f(x_2) = g(x_2) - h(x_2) < 0 = f(m)$,

$f(x_1) = g(x_1) - h(x_1) > 0 = f(m)$,

$\therefore f(x_2) < f(m) < f(x_1)$.

9. 【答案】 $(2, +\infty)$

【解析】 $\log_2 x > 1 = \log_2 2$, 可得 $x > 2$.

10. 【答案】8

【解析】 $f(x)$ 的对称轴为 $x = -\frac{3}{2}$,

题目给的区间在对称轴右边,

即 $f(x)$ 在该区间递增,

可得最小值 $m = -6$,

最大值 $M = 14$,

可得 $m + M = 8$.

11. 【答案】-2

【解析】由题意得 $(2m, m) + (n, -2n) = (2m + n, m - 2n) = (5, -5)$,

解得 $m = 1$, $n = 3$,

$\therefore m - n = -2$.

12. 【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】由题意得 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BD}$,

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BA} + 2\mu \overrightarrow{BO},$$

$\because E$ 为线段 AO 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO}),$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{3}{4}.$$

13. 【答案】2

【解析】由题意可得: $\phi \geq -\frac{\pi}{2}, \quad \omega \cdot \frac{\pi}{3} + \phi \leq \frac{\pi}{2},$

$$\text{由 } f(0) = -1,$$

$$\text{解得 } \phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \omega \leq 3,$$

$$\text{由 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\text{解得 } \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\omega\right) = \cos \frac{\pi}{3}\omega,$$

$$\therefore \pi - \frac{\pi}{6}\omega = \frac{\pi}{3}\omega \text{ 或 } \pi - \frac{\pi}{6}\omega = 2\pi - \frac{\pi}{3}\omega,$$

$$\therefore \omega = 2 \text{ 或 } 6 \text{ (舍去)}.$$

14. 【答案】2, 3

【解析】(1) $f(4) = f(2 \times 2) = 2f(2) = 2f(2 \times 1) = 4f(1) = 8,$

$$\therefore f(1) = 2.$$

(2) 令 $y = \cos x = 0 (x \in (1, 2])$,

$$\therefore x = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{由 } f(2x) = 2f(x) \text{ 得 } f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\text{若 } 2 < x \leq 4, \text{ 则 } 1 < \frac{x}{2} \leq 2, \text{ 则 } f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos \frac{x}{2},$$

$$\text{则函数 } f(x) \text{ 在 } (2, 4] \text{ 上的解析式为 } y = 2\cos \frac{x}{2},$$

$$\text{由 } 2\cos \frac{x}{2} = 0 \text{ 可得 } x = \pi,$$

$$\text{同理可得 } (4, 8] \text{ 上的解析式为 } y = 4\cos \frac{x}{4},$$

由 $4\cos\frac{x}{4}=0$ 可得 $x=2\pi$,

$\therefore y=f(x)$ 在 $(1,8]$ 上仅有 3 个零点.

