

北京一零一中 2015-2016 学年度第一学期期末考试  
高一数学

一、选择题：本大题共 8 小题，共 40 分。

1. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集合  $M = \{1, 4\}$ ， $N = \{1, 3, 5\}$ ，则  $N \cap (C_U M) =$  ( ).  
A.  $\{1\}$                       B.  $\{3, 5\}$                       C.  $\{1, 3, 4, 5\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 5, 6\}$
2. 已知平面直角坐标系内的点  $A(1, 1)$ ， $B(2, 4)$ ， $C(-1, 3)$ ，则  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| =$  ( ).  
A.  $2\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{10}$                       C. 8                      D. 10
3. 已知  $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{5}$ ， $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，则  $\tan \alpha$  的值是 ( ).  
A.  $-\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{4}{3}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D.  $-\frac{4}{3}$
4. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$  ( $x \in \mathbf{R}, \omega > 0$ ) 的最小正周期为  $\pi$ ，为了得到函数  $g(x) = \cos \omega x$  的图象，只要将  $y = f(x)$  的图象 ( ).  
A. 向左平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度                      B. 向右平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度                      D. 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度
5. 已知  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  是非零向量且满足  $(3\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$ ， $(4\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角是 ( ).  
A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{2}{3}\pi$                       D.  $\frac{5}{6}\pi$
6. 已知  $E$ ， $F$ ， $G$ ， $H$  分别是四边形  $ABCD$  的所在边的中点，若  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = 0$ ，则四边形  $EFGH$  是 ( ).  
A. 平行四边形但不是矩形                      B. 正方形                      C. 菱形                      D. 矩形
7. 设偶函数  $f(x) = \log_a |x - b|$  在  $(-\infty, 0)$  是递增函数，则  $f(a+1)$  与  $f(b+2)$  的大小关系是 ( ).  
A.  $f(a+1) = f(b+2)$                       B.  $f(a+1) < f(b+2)$   
C.  $f(a+1) > f(b+2)$                       D. 不确定

8. 已知  $O$  为平面内一点,  $A, B, C$  是平面内不共线的三点, 且  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) +$

$\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C})$ ,  $\lambda \in (0, +\infty)$ , 则动点  $P$  的轨迹一定过  $\triangle ABC$  的 ( ).

- A. 内心                      B. 垂心                      C. 重心                      D. 外心

## 二、填空题: 本大题共 6 小题, 共 30 分

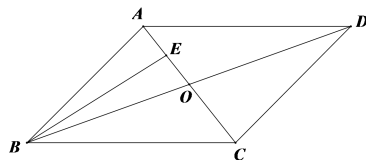
9. 若  $f(x) = x^3$ , 则满足  $f(x) < 1$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

10. 若函数  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  在  $x \in [-1, 3]$  上的最大值和最小值分别为  $a, b$ , 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.

11. 已知向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, -2)$ , 若  $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)$ , 则  $m - n$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 若  $\tan \theta = 3$ , 则  $2\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta =$ \_\_\_\_\_.

13. 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AC, BD$  相交于点  $O$ ,  $E$  为线段  $AO$  的中点, 若  $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BD}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ), 则  $\lambda + \mu =$ \_\_\_\_\_.



14. 已知点  $O$  为三角形  $ABC$  内一点,  $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ , 则  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}} =$ \_\_\_\_\_.



三、解答题：本大题共 5 小题，共 50 分.

15. 设全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{x \mid -1 \leq x < 3\}$ ， $B = \{x \mid 2x - 4 \geq x - 2\}$ .

(I) 求  $C_U(A \cap B)$ ;

(II) 若集合  $C = \{x \mid x - a > 0\}$ ，满足  $B \cup C = C$ ，求实数  $a$  的取值范围.



16. 求值:  $\frac{\tan 150^\circ \cos(-210^\circ) \sin(-420^\circ)}{\sin 1050^\circ \cos(-600^\circ)}$  .



17. 已知  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, 1)$ , 且  $\vec{a}$  与  $\vec{a} + \lambda\vec{b}$  的夹角为锐角, 求实数  $\lambda$  的取值范围.

18. 设函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  (其中  $A > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ) 在  $x = \frac{\pi}{6}$  处取得最大值 2, 其图象与  $x$  轴

的相邻两个交点的距离为  $\frac{\pi}{2}$ .

(I) 求  $f(x)$  的解析式.

(II) 求函数  $g(x) = \frac{6\cos^4 x - \sin^2 x - 1}{\left[f\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right]^2 - 2}$  的值域.



19. 设函数  $f(x) = \frac{4^x}{2 + 4^x}$ .

(I) 用定义证明: 函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数.

(II) 证明: 对任意的实数  $t$  都有  $f(t) + f(1-t) = 1$ .

(III) 求值:  $f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{2}{2016}\right) + f\left(\frac{3}{2016}\right) + \dots + f\left(\frac{2015}{2016}\right)$ .

北京一零一中 2015-2016 学年度第一学期期末考试  
高一数学答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	D	A	A	D	C	D

二、填空题

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$(-\infty, 1)$	$\frac{39}{4}$	-3	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 50 分。

15. 解：(I) 依题意知：集合  $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$ ， $B = \{x | x \geq 2\}$  （解不等式  $2x - 4 \geq x - 2$  可得：  $x \geq 2$ ），

$$\text{故 } A \cap B = \{x | 2 \leq x < 3\}.$$

$$\text{又 } U = R, \text{ 从而 } C_U(A \cap B) = \{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 3\}.$$

$$(II) \text{ 易知集合 } C = \{x | x - a > 0\} = \{x | x > a\},$$

$$\text{由 } B \cup C = C \text{ 可得： } B \subseteq C,$$

$$\text{故有 } a < 2.$$

$$\text{即所求实数 } a \text{ 的取值范围是 } (-\infty, 2).$$

16. 解：由诱导公式可得：  $\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$$\cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin(-420^\circ) = -\sin 420^\circ = -\sin(360^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 1050^\circ = \sin(3 \times 360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\cos(-600^\circ) = \cos 600^\circ = \cos(3 \times 180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故原式} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})}{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{3}.$$



- 即所求实数  $\lambda$  的取值范围是  $(-\frac{5}{3}, +\infty)$ .

- 于是  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$  ,

由  $f(x)$  在  $x = \frac{\pi}{6}$  处取得最大值 2 可得:

$$2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

又  $-\pi < \varphi < \pi$  故  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .

因此  $f(x)$  的解析式为  $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ .

(II) 由 (I) 可得:  $f(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = 2\sin\left[2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos x$ ,

$$\begin{aligned}\text{故 } g(x) &= \frac{6\cos^4 x - (1 - \cos^2 x) - 1}{(2\cos x)^2 - 2}, \\ &= \frac{6\cos^4 x + \cos^2 x - 2}{4\cos^2 x - 2} \\ &= \frac{(3\cos^2 x + 2)(2\cos^2 x - 1)}{2(2\cos^2 x - 1)} \\ &= \frac{3\cos^2 x + 2}{2} \\ &= \frac{3}{2}\cos^2 x + 1 \quad (\cos^2 x \neq \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

令  $t = \cos^2 x$ , 可知  $0 \leq t \leq 1$  且  $t \neq \frac{1}{2}$ ,

即  $\cos^2 x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

从而  $g(x) \in \left[1, \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right]$

因此, 函数  $g(x)$  的值域为  $\left[1, \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right]$ .

- $$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4^{x_1}}{2 + 4^{x_1}} - \frac{4^{x_2}}{2 + 4^{x_2}} = \frac{4^{x_1}(2 + 4^{x_2}) - 4^{x_2}(2 + 4^{x_1})}{(2 + 4^{x_1})(2 + 4^{x_2})} = \frac{2(4^{x_1} - 4^{x_2})}{(2 + 4^{x_1})(2 + 4^{x_2})}.$$

从而  $f(x_1) - f(x_2) < 0$  即  $f(x_1) < f(x_2)$ .

根据函数单调性的定义可得：函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为增函数.

$$\begin{aligned} \text{(II) 证明: 因为 } f(t) + f(1-t) &= \frac{4^t}{2+4^t} + \frac{4^{1-t}}{2+4^{1-t}} \\ &= \frac{4^t(2+4^{1-t}) + 4^{1-t}(2+4^t)}{(2+4^t)(2+4^{1-t})} \\ &= \frac{2(4^t + 4^{1-t}) + 8}{4 + 2(4^t + 4^{1-t}) + 4} = 1. \end{aligned}$$

故对任意的实数  $t$  都有  $f(t) + f(1-t) = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{(III) 由 (II) 可得: } f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{2015}{2016}\right) &= 1, \quad f\left(\frac{2}{2016}\right) + f\left(\frac{2014}{2016}\right) = 1, \\ f\left(\frac{3}{2016}\right) + f\left(\frac{2013}{2016}\right) &= 1, \dots, \quad f\left(\frac{2015}{2016}\right) + f\left(\frac{1}{2016}\right) = 1, \\ \text{令 } f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{2}{2016}\right) + f\left(\frac{3}{2016}\right) + \dots + f\left(\frac{2015}{2016}\right) &= M, \\ \text{则 } f\left(\frac{2015}{2016}\right) + f\left(\frac{2014}{2016}\right) + f\left(\frac{2013}{2016}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2016}\right) &= M. \end{aligned}$$

上下等式左右两边分别相加可得:  $2015 \times 1 = 2M$

$$\text{故可得: } M = \frac{2015}{2}.$$

$$\text{因此, } f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{2}{2016}\right) + f\left(\frac{3}{2016}\right) + \dots + f\left(\frac{2015}{2016}\right) = \frac{2015}{2}.$$

北京一零一中 2015-2016 学年度第一学期期末考试  
高一数学试卷部分解析

一、选择题

1. 【答案】B

【解析】根据题意,  $C_U M = \{2, 3, 5, 6\}$ , 故  $N \cap (C_U M) = \{3, 5\}$ .

故选 B.

2. 【答案】B

【解析】 $\because A(1,1), B(2,4), C(-1,3)$ ,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (1,3), \overrightarrow{AC} = (-2,2).$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (3,1),$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

故选 B.

3. 【答案】D

【解析】 $\because \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{5}, \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,

$$\text{又} \because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

故选 D.

4. 【答案】A

【解析】由题知  $\omega = 2$ ,

$$\therefore f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (2x + \frac{\pi}{4})\right]$$

$$= \cos(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$= \cos 2(x - \frac{\pi}{8}).$$

故选 A.

5. 【答案】A

【解析】设  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角是  $\alpha$ ，

$$\because (3\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}, \quad (4\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b},$$

$$\therefore (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0, \quad (4\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{即 } 3\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0; \quad 4\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 0.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{a}^2; \quad \vec{b}^2 = 12\vec{a}^2.$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3\vec{a}^2}{2\sqrt{3}\vec{a}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

故选 A.

6. 【答案】D

【解析】连接  $AC$ ， $BD$ 。

$\because E, F, G, H$  分别是四边形  $ABCD$  的所在边的中点，

$$\therefore EF \parallel GH \parallel AC, \quad EF = GH = \frac{1}{2}AC,$$

$\therefore$  四边形  $EFGH$  是平行四边形.

$$\because (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}.$$

$$\because EF \parallel AC, \quad FG \parallel BD,$$

$$\therefore EF \perp FG,$$

$\therefore$  四边形  $EFGH$  是矩形.

故选 D.

7. 【答案】C

【解析】 $\because f(x) = \log_a |x - b|$  是偶函数，

$$\therefore \log_a |x - b| = \log_a |-x - b|,$$

$$\therefore |x - b| = |-x - b|,$$

$$\therefore x^2 - 2bx + b^2 = x^2 + 2bx + b^2.$$

整理得  $4bx = 0$ ，由于  $x$  不恒为 0，故  $b = 0$ ，

由此函数变为  $y = \log_a |x|$ ，

当  $x \in (-\infty, 0)$  时，由于内层函数是一个减函数，

又  $\because y = \log_a |x - b|$  在区间  $(-\infty, 0)$  上递增，

綜上的  $0 < a < 1$ ,  $b = 0$ .

$$\therefore f(a+1) > f(b+2) .$$

故选 C.

8. 【答案】D

【解析】 $\because \overrightarrow{BC} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right) = -|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}| = 0,$

$$\therefore \overrightarrow{BC} \text{ 与 } \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right) \text{ 垂直,}$$

设  $D$  为  $BC$  的中点, 则  $\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \overrightarrow{OD}$ ,

$$\text{令 } \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right) = \overrightarrow{DP},$$

$$\therefore \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

$$= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OP}.$$

$\therefore$  点  $P$  在  $BC$  的垂直平分线上, 点  $P$  的轨迹过  $\triangle ABC$  的外心.

故选 D.

## 二、填空题

9. 【答案】  $(-\infty, 1)$

【解析】若  $x \leq 0$ , 由  $f(x) < 1$ ,

解得  $x \leq 0$ ;

若  $x > 0$ , 由  $f(x) < 1$ ,

解得  $0 < x < 1$ ,

故取值范围是  $(-\infty, 1)$ .

10. 【答案】  $\frac{39}{4}$

【解析】对称轴  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$ ,

由二次函数性质可得:

$$a = f(x)_{\max} = f(-1) = 1 + 3 + 4 = 8,$$

$$b = f(x)_{\min} = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4},$$

所以  $a+b=8+\frac{7}{4}=\frac{39}{4}$ .

故答案为:  $\frac{39}{4}$ .

11. 【答案】 -3

【解析】 向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, -2)$ , 若  $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)$ ,

$$\text{可得} \begin{cases} 2m + n = 9 \\ m - 2n = -8 \end{cases}, \text{解得 } m = 2, n = 5,$$

$$\therefore m - n = -3.$$

故答案为 -3.

12. 【答案】  $\frac{7}{5}$

【解析】  $2\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$

$$= \frac{2\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2\tan^2 \theta - \tan \theta - 1}{\tan^2 \theta + 1}$$

$$= \frac{18 - 3 - 1}{9 + 1}$$

$$= \frac{7}{5}.$$

故答案为:  $\frac{7}{5}$ .

13. 【答案】  $\frac{3}{4}$

【解析】  $\because \vec{BD} = 2\vec{BO}, \vec{BE} = \lambda\vec{BA} + \mu\vec{BD},$

$$\therefore \vec{BE} = \lambda\vec{BA} + 2\mu\vec{BO},$$

$\because E$  为线段  $AO$  的中点,

$$\therefore \vec{BE} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BO}),$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}, 2\mu = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } \mu = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{3}{4}.$$

故答案为  $\frac{3}{4}$ .

14. 【答案】  $\frac{7}{2}$

【解析】延长  $OB$  至  $B'$ ，使  $OB' = 2OB$ ；延长  $OC$  至  $C'$ ，使  $OC' = 3OC$ ，

则  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$ ，

$\therefore O$  是  $\triangle AB'C'$  的重心，

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle AOC} &= S_{\triangle B'OC} \\ &= S_{\triangle AOB'} \\ &= \frac{1}{3} S_{\triangle AB'C'}.\end{aligned}$$

$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOC'},$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{6} S_{\triangle B'OC'},$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB'},$$

$$\therefore S_{\triangle AOC} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOB} = 2 : 1 : 3.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{7}{2}.$$

