

北京市朝阳区 2015-2016 学年度高三第一学期期末统一考试

数学试卷（文史类）

2016. 1

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1\}$ ， $B = \{x | -1 < x \leq 1\}$ ，则  $A \cap B =$

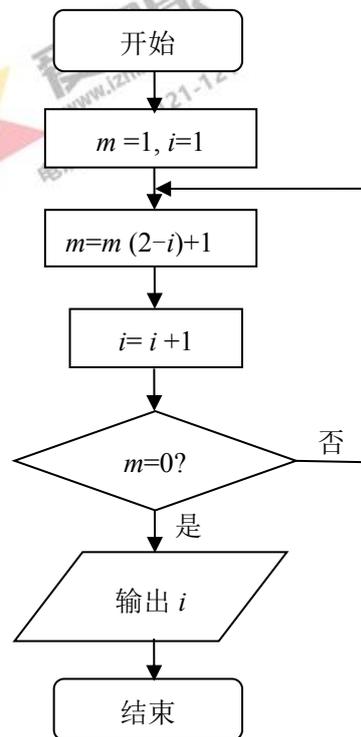
- A.  $\{0, 1\}$       B.  $\{-1, 0\}$       C.  $\{0\}$       D.  $\{-1, 0, 1\}$

2. 下列函数中，既是奇函数又存在零点的是

- A.  $f(x) = \sqrt{x}$       B.  $f(x) = \frac{1}{x}$       C.  $f(x) = e^x$       D.  $f(x) = \sin x$

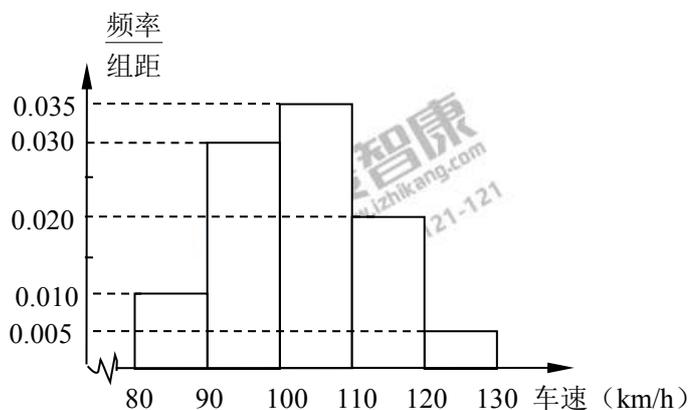
3. 执行如图所示的程序框图，则输出的  $i$  值为

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6



4. 在一段时间内有 2000 辆车通过高速公路上的某处，现随机抽取其中的 200 辆进行车速统计，统计结果如下面的频率分布直方图所示. 若该处高速公路规定正常行驶速度为 90 km/h~120 km/h，试估计 2000 辆车中，在这段时间内以正常速度通过该处的汽车约有

- A. 30 辆      B. 300 辆  
C. 170 辆    D. 1700 辆



5. 已知  $m, n$  表示两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  表示两个不同的平面, 且  $m \subset \alpha, n \subset \beta$ , 则下列说法正确的是

- A. 若  $\alpha // \beta$ , 则  $m // n$       B. 若  $m \perp \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$   
C. 若  $m // \beta$ , 则  $\alpha // \beta$       D. 若  $\alpha \perp \beta$ , 则  $m \perp n$

6. 设斜率为 2 的直线  $l$  过抛物线  $y^2 = ax$  ( $a \neq 0$ ) 的焦点  $F$ , 且与  $y$  轴交于点  $A$ , 若  $\triangle OAF$  ( $O$  为坐标原点) 的面积为 4, 则抛物线方程为

- A.  $y^2 = \pm 4x$       B.  $y^2 = 4x$       C.  $y^2 = \pm 8x$       D.  $y^2 = 8x$

7. 已知  $A, B$  为圆  $C: (x-m)^2 + (y-n)^2 = 9$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ) 上两个不同的点 ( $C$  为圆心), 且满足  $|\vec{CA} + \vec{CB}| = \sqrt{13}$ , 则  $|AB| =$

- A.  $\sqrt{23}$       B.  $\frac{\sqrt{23}}{2}$       C. 2      D. 4

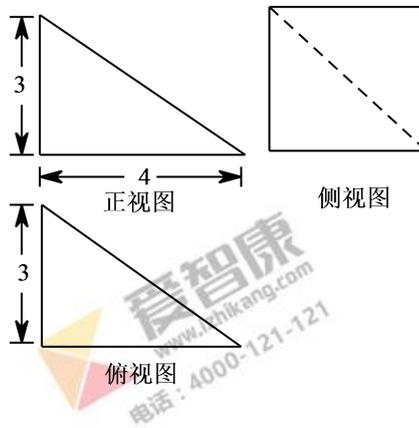
8. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在正实数  $m$ , 使得对任意  $x \in D$ , 当  $x+m \in D$  时, 都有  $f(x+m) > f(x)$ , 则称  $f(x)$  为  $D$  上的“ $m$  型增函数”. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x > 0$  时,  $f(x) = |x-a| - a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 若  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的“20 型增函数”, 则实数  $a$  的取值范围是

- A.  $a > 0$       B.  $a < 20$       C.  $a < 10$       D.  $a < 5$

## 第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。把答案填在答题卡上。

9. 计算： $i(1-i) = \underline{\hspace{2cm}}$ . ( $i$  为虚数单位).
10. 双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的渐近线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
11. 在  $\triangle ABC$  中，若  $BC = 1$ ， $AC = 2$ ， $\cos C = \frac{1}{4}$ ，则  $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$ .
12. 已知正数  $x$ ， $y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ x - 3y + 5 \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+y}$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
13. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积是  $\underline{\hspace{2cm}}$ ，侧面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



14. 在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ， $D$  为线段  $AC$  的中点，若  $BD$  的长为定值  $l$ ，则  $\triangle ABC$  面积的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ （用  $l$  表示）.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本小题满分 13 分）

已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列，数列  $\{b_n\}$  是各项均为正数的等比数列，且  $a_1 = b_1 = 3$ ，

$$a_2 + b_2 = 14, \quad a_3 + a_4 + a_5 = b_3.$$

(I) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式；

(II) 设  $c_n = a_n + b_n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和。

16. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + a$  的图象过点  $(\frac{\pi}{6}, 1)$ .

(I) 求实数  $a$  的值及函数  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 求函数  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的最小值.



17. (本小题满分 13 分)

某中学从高一年级、高二年级、高三年级各选 1 名男同学和 1 名女同学，组成社区服务小组。现从这个社区服务小组的 6 名同学中随机选取 2 名同学，到社区老年中心参加“尊老爱老”活动（每位同学被选到的可能性相同）。

(I) 求选出的 2 人都是女同学的概率；

(II) 设“选出的 2 人来自不同年级且是 1 名男同学和 1 名女同学”为事件  $N$ ，求事件  $N$  发生的概率。

18. (本小题满分 14 分)

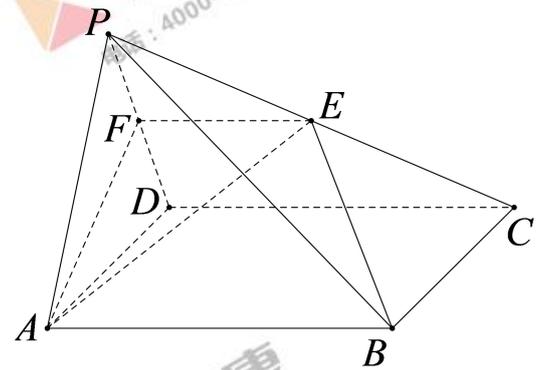
如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是正方形. 点  $E$  是棱  $PC$  的中点，平面  $ABE$  与棱  $PD$  交于点  $F$ .

(I) 求证:  $AB \parallel EF$ ;

(II) 若  $PA = AD$ ，且平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ，试证明  $AF \perp$  平面  $PCD$ ;

(III) 在 (II) 的条件下，线段  $PB$  上是否存在点  $M$ ，使得  $EM \perp$  平面  $PCD$ ?

(直接给出结论，不需要说明理由)



19. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = (2k-1)\ln x + \frac{k}{x} + 2x$ ,  $k \in \mathbf{R}$ .

- (I) 当  $k=1$  时, 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;  
(II) 当  $k=e$  时, 试判断函数  $f(x)$  是否存在零点, 并说明理由;  
(III) 求函数  $f(x)$  的单调区间.



20. (本小题满分 14 分)

已知圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  的切线  $l$  与椭圆  $C: x^2 + 3y^2 = 4$  相交于  $A, B$  两点.

(I) 求椭圆  $C$  的离心率;

(II) 求证:  $OA \perp OB$ ;

(III) 求  $\triangle OAB$  面积的最大值.



北京市朝阳区 2015-2016 学年度第一学期期末高三年级统一考试

数学答案（文史类）

2016. 1

一、选择题：（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	D	B	C	A	D

二、填空题：（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$1+i$	$y = \pm\sqrt{3}x$	$2, \frac{\sqrt{15}}{8}$	$\frac{1}{16}$	$12, 27$	$\frac{2}{3}l^2$

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：（满分 80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（I）设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ ，且  $q > 0$ 。

依题意有，

$$\begin{cases} a_1 + d + b_1 q = 14 \\ 3(a_1 + 3d) = b_1 q^2 \end{cases}$$

由  $a_1 = b_1 = 3$ ，又  $q > 0$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} q = 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

所以  $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + 2(n-1) = 2n+1$ ，即  $a_n = 2n+1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 3 \times 3^{n-1} = 3^n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

（II）因为  $c_n = a_n + b_n = 2n+1+3^n$

$$\begin{aligned} \text{所以前 } n \text{ 项和 } S_n &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= (3+5+\cdots+2n+1) + (3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n) \\ &= \frac{n(3+2n+1)}{2} + \frac{3(1-3^n)}{1-3} \\ &= n(n+2) + \frac{3}{2}(3^n - 1) \end{aligned}$$

所以前  $n$  项和  $S_n = n(n+2) + \frac{3}{2}(3^n - 1)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

16. (本小题满分 13 分)

解: (I) 由  $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + a$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin 2x}{2} + a \\ &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} + a. \end{aligned}$$

因为函数  $f(x)$  的图象过点  $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ ,

所以  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} + a = 1$ . 解得  $a = -\frac{1}{2}$ .

函数  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ .

(II) 因为  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ .

$$\text{则 } -\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1.$$

所以当  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ , 即  $x = \frac{\pi}{2}$  时, 函数  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最小值为  $-\frac{1}{2}$ .

17. (本小题满分 13 分)

解: 从高一年级、高二年级、高三年级选出的男同学分别记为  $A, B, C$ , 女同学分别记为  $X, Y, Z$ .

从 6 名同学中随机选出 2 人参加活动的所有基本事件为:

$$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, X\}, \{A, Y\}, \{A, Z\}, \{B, C\}, \{B, X\}, \{B, Y\}, \{B, Z\}, \{C, X\},$$

$$\{C, Y\}, \{C, Z\}, \{X, Y\}, \{X, Z\}, \{Y, Z\},$$

(I) 设“选出的 2 人都是女同学”为事件  $M$ ,

则事件  $M$  包含的基本事件有  $\{X, Y\}, \{X, Z\}, \{Y, Z\}$ , 共 3 个,

$$\text{所以, 事 } M \text{ 发生的概率 } P(M) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

(II) 事件  $N$  包含的基本事件有

$$\{A, X\}, \{A, Z\}, \{B, X\}, \{B, Z\}, \{C, X\}, \{C, Y\}, \text{ 共 6 个,}$$

$$\text{所以, 事件 } N \text{ 发生的概率 } P(N) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

18. (本小题满分 14 分)

(I) 证明: 因为底面  $ABCD$  是正方形,

所以  $AB \parallel CD$ .

又因为  $AB \not\subset$  平面  $PCD$ ,  $CD \subset$  平面  $PCD$ ,

所以  $AB \parallel$  平面  $PCD$ .

又因为  $A, B, E, F$  四点共面, 且平面  $ABEF \cap$  平面  $PCD = EF$ ,

所以  $AB \parallel EF$ .

(II) 在正方形  $ABCD$  中,  $CD \perp AD$ .

又因为平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,

且平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,

所以  $CD \perp$  平面  $PAD$ .

又  $AF \subset$  平面  $PAD$

所以  $CD \perp AF$ .

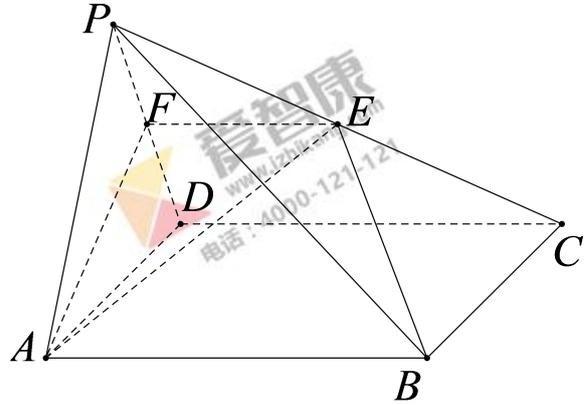
由 (I) 可知  $AB \parallel EF$ ,

又因为  $AB \parallel CD$ , 所以  $CD \parallel EF$ . 由点  $E$  是棱  $PC$  中点, 所以点  $F$  是棱  $PD$  中点.

在  $\triangle PAD$  中, 因为  $PA = AD$ , 所以  $AF \perp PD$ .

又因为  $PD \cap CD = D$ , 所以  $AF \perp$  平面  $PCD$ .

(III) 不存在.



19. (本小题满分 13 分)

解: 函数  $f(x)$  的定义域:  $x \in (0, +\infty)$ .

$$f'(x) = \frac{2k-1}{x} - \frac{k}{x^2} + 2 = \frac{2x^2 + (2k-1)x - k}{x^2} = \frac{(x+k)(2x-1)}{x^2}.$$

(I) 当  $k=1$  时,  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 2x$ .

$$f'(x) = \frac{(x+1)(2x-1)}{x^2}.$$

有  $f(1) = \ln 1 + 1 + 2 = 3$ , 即切点  $(1, 3)$ ,

$$k = f'(1) = \frac{(1+1)(2-1)}{1^2} = 2.$$

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处切线方程是  $y - 3 = 2(x - 1)$ ,

即  $y = 2x + 1$ .

(II) 若  $k=e$ ,  $f(x)=(2e-1)\ln x+\frac{e}{x}+2x$ .

$$f'(x)=\frac{(x+e)(2x-1)}{x^2}.$$

令  $f'(x)=0$ , 得  $x_1=-e$  (舍),  $x_2=\frac{1}{2}$ .

$x$	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$$\text{则 } f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = (2e-1)\ln\frac{1}{2} + \frac{e}{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2(1-\ln 2)e + \ln 2 + 1 > 0.$$

所以函数  $f(x)$  不存在零点.

(III)  $f'(x)=\frac{(x+k)(2x-1)}{x^2}$ .

当  $-k \leq 0$ , 即  $k \geq 0$  时,

$x$	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

当  $0 < -k < \frac{1}{2}$ , 即  $-\frac{1}{2} < k < 0$  时,

$x$	$(0, -k)$	$-k$	$(-k, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

当  $-k = \frac{1}{2}$ , 即  $k = -\frac{1}{2}$  时,

$x$	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

$x$	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, -k)$	$-k$	$(-k, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当  $-k > \frac{1}{2}$ , 即  $k < -\frac{1}{2}$  时,

综上, 当  $k \geq 0$  时,  $f(x)$  的单调增区间是  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ; 减区间是  $(0, \frac{1}{2})$ .

当  $-\frac{1}{2} < k < 0$  时,  $f(x)$  的单调增区间是  $(0, -k)$ ,  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ; 减区间是  $(-k, \frac{1}{2})$ .

当  $k = -\frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  的单调增区间是  $(0, +\infty)$ ;

当  $k < -\frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  的单调增区间是  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(-k, +\infty)$ ; 减区间是  $(\frac{1}{2}, -k)$ .

20. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意可知  $a^2 = 4$ ,  $b^2 = \frac{4}{3}$ , 所以  $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{8}{3}$ .

所以  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . 所以椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

(II) 若切线  $l$  的斜率不存在, 则  $l: x = \pm 1$ .

在  $\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = 1$  中令  $x = 1$  得  $y = \pm 1$ .

不妨设  $A(1, 1)$ ,  $B(1, -1)$ , 则  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 - 1 = 0$ . 所以  $OA \perp OB$ .

同理, 当  $l: x = -1$  时, 也有  $OA \perp OB$ .

若切线  $l$  的斜率存在, 设  $l: y = kx + m$ , 依题意  $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ , 即  $k^2 + 1 = m^2$ .

由  $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$ , 得  $(3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 4 = 0$ . 显然  $\Delta > 0$ .

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = -\frac{6km}{3k^2 + 1}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 4}{3k^2 + 1}$ .

所以  $y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$ .

$$\text{所以 } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (k^2 + 1)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$$

$$= (k^2 + 1) \frac{3m^2 - 4}{3k^2 + 1} - km \frac{6km}{3k^2 + 1} + m^2$$

$$= \frac{(k^2 + 1)(3m^2 - 4) - 6k^2 m^2 + (3k^2 + 1)m^2}{3k^2 + 1}$$

$$= \frac{4m^2 - 4k^2 - 4}{3k^2 + 1} = \frac{4(k^2 + 1) - 4k^2 - 4}{3k^2 + 1} = 0.$$

所以  $OA \perp OB$ .

综上所述, 总有  $OA \perp OB$  成立.

(III) 因为直线  $AB$  与圆  $O$  相切, 则圆  $O$  半径即为  $\triangle OAB$  的高.

当  $l$  的斜率不存在时, 由 (II) 可知  $|AB| = 2$ . 则  $S_{\triangle OAB} = 1$ .

当  $l$  的斜率存在时, 由 (II) 可知,

$$|AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{6km}{3k^2+1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3m^2-4}{3k^2+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1} \cdot \sqrt{9k^2 m^2 - (3m^2-4)(3k^2+1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1} \cdot \sqrt{12k^2 - 3m^2 + 4} = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1} \cdot \sqrt{12k^2 - 3(k^2+1) + 4}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1} \cdot \sqrt{9k^2+1}.$$

$$\text{所以 } |AB|^2 = \frac{4(1+k^2)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2} = \frac{4(9k^4+10k^2+1)}{9k^4+6k^2+1} = 4\left(1 + \frac{4k^2}{9k^4+6k^2+1}\right)$$

$$= 4 + 16 \cdot \frac{k^2}{9k^4+6k^2+1} = 4 + \frac{16}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

(当且仅当  $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  时, 等号成立).

$$\text{所以 } |AB|_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ 此时, } (S_{\triangle OAB})_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

综上所述，当且仅当  $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  时， $\triangle OAB$  面积的最大值为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

北京市朝阳区 2015-2016 学年度第一学期期末高三年级统一考试

### 数学答案及解析（文史类）

1. 【答案】A.

【解析】根据题意  $A \cap B = \{0, 1\}$ ，故选 A.

2. 【答案】D.

【解析】对于 A，C 是非奇非偶函数，B 则没有零点，只有 D 正确，故选 D.

3. 【答案】B.

【解析】根据程序框图，

第一次循环： $m = 1 \times (2 - 1) + 1 = 2$ ， $i = 2$ ；

第二次循环： $m = 2 \times (2 - 2) + 1 = 1$ ， $i = 3$ ；

第三次循环： $m = 1 \times (2 - 3) + 1 = 0$ ， $i = 4$ ；

结束循环， $i = 4$ ，故选 B.

4. 【答案】D.

【解析】根据频率分布直方图可知，

正常行驶速度为  $90 \text{ km/h} \sim 120 \text{ km/h}$  的频率为： $(0.030 + 0.035 + 0.020) \times 10 = 0.85$ ，

因此在这段时间内以正常速度通过该处的汽车约有： $2000 \times 0.85 = 1700$ ，故选 D.

5. 【答案】B.

【解析】若  $\alpha // \beta$ ，且  $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$  时，直线  $m$  与  $n$  可能平行或异面，A 不对；

若  $m \perp \beta$ ，且  $m \subset \alpha$  则  $\alpha \perp \beta$ ，B 正确；

若  $m // \beta$ ，且  $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$  时，则  $\alpha$  与  $\beta$  平行或相交，C 不对；

若  $\alpha \perp \beta$ ，且  $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$  时，直线  $m$  与  $n$  可能垂直或不垂直，D 不对，故

选 B.

6. 【答案】C.

【解析】根据题意，抛物线  $y^2 = ax$  ( $a \neq 0$ ) 的焦点  $F$  为  $(\frac{a}{4}, 0)$ ，

所以直线  $l$  的方程为:  $y = 2x - \frac{a}{2}$ , 当  $x = 0$  时,  $y = -\frac{a}{2}$ ,

三角形  $\triangle OAF$  的面积  $S_{\triangle OAF} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OF| = \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{a}{2} \right| \cdot \left| \frac{a}{4} \right| = \frac{a^2}{16} = 4$ ,

解得  $a = \pm 8$ , 因此, 则抛物线方程为  $y^2 = \pm 8x$ , 故选 C.

7. 【答案】A.

【解析】根据  $|\overline{CA} + \overline{CB}| = \sqrt{13}$  可知, 圆心到弦  $|AB|$  的距离  $d = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ,

因此弦长  $|AB| = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} = \sqrt{23}$ , 故选 A.

8. 【答案】D.

【解析】因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 所以  $f(0) = 0$ .

当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 所以  $f(-x) = |-x - a| - a = |x + a| - a$ ,

所以  $f(x) = -f(-x) = -|x + a| + a$ .

$$f(x) = \begin{cases} |x - a| - a, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -|x + a| + a, & x < 0 \end{cases}$$

分类讨论:

① 当  $x > 0$  时, 由  $f(x + 20) > f(x)$ , 可得  $|x + 20 - a| - a > |x - a| - a$ ,

化为  $|x - (a - 20)| > |x - a|$ , 由绝对值的几何意义可得,

$a + a - 20 < 0$ , 解得  $a < 10$ ;

② 当  $x < 0$  时, 由  $f(x + 20) > f(x)$ , 分为以下两个类型研究:

(i) 当  $x + 20 < 0$  时, 可得  $-|x + 20 + a| + a > -|x + a| + a$ ,

化为  $|x + 20 + a| > |x + a|$ , 由绝对值的几何意义可得,

$-a - a - 20 > 0$ , 解得  $a < 10$ .

(ii) 当  $x + 20 > 0$  时, 可得  $|x + 20 - a| - a > -|x + a| + a$ ,

化为  $|x + 20 - a| + |x + a| > 2a$ , 因为  $|x + 20 - a| + |x + a| \geq |20 - 2a|$ ,

因此  $|20 - 2a| > 2a$ , 当  $a \leq 0$  时, 恒成立, 当  $a > 0$  时,  $a < 5$ ;

③当  $x=0$  时, 由  $f(20) > f(0)$ , 可得  $|20-a| - a > 0$ ,

当  $a \leq 0$  时, 恒成立, 当  $a > 0$  时,  $a < 10$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围是  $a < 5$ , 故选 D.

9. 【答案】  $1+i$ .

【解析】根据复数的运算法则,  $i(1-i) = i - i^2 = 1+i$ , 故答案为:  $1+i$ .

10. 【答案】  $y = \pm\sqrt{3}x$ .

【解析】焦点在  $x$  上的双曲线的渐近线方程为:  $y = \pm\frac{b}{a}x$ , 即  $y = \pm\sqrt{3}x$ ,

故答案为:  $y = \pm\sqrt{3}x$ .

11. 【答案】  $2; \frac{\sqrt{15}}{8}$ .

【解析】根据余弦定理  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 解得  $AB = 2$ ,

因为  $\cos C = \frac{1}{4}$ , 所以  $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ,

再根据正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ , 有  $\frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\frac{\sqrt{15}}{4}}$ ,

解得,  $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}$ , 故答案为:  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ .

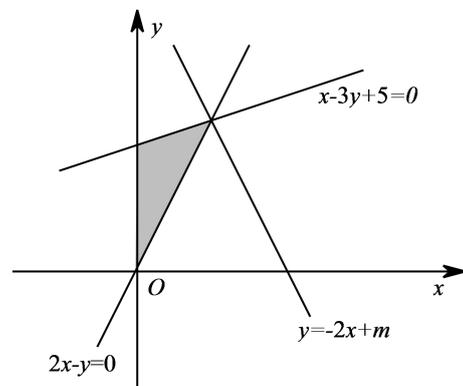
12. 【答案】  $\frac{1}{16}$ .

【解析】根据题意, 可行域如图所示, 若求  $z = (\frac{1}{2})^{2x+y}$  的最小值,

需求  $m = 2x + y$  的最大值,

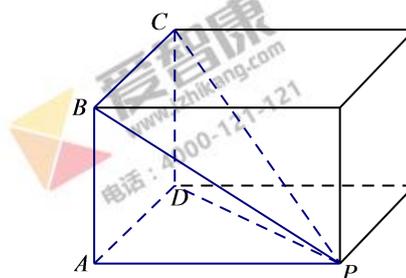
过点  $(1, 2)$  时,  $m_{\max} = 2x + y = 4$ , 因此  $z_{\min} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ ,

故答案为:  $\frac{1}{16}$ .



13. 【答案】 12； 27.

【解析】 在长方体中还原四棱锥如图所示，



根据三视图，

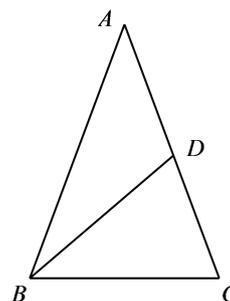
在四棱锥  $P-ABCD$ ，  $AB = AD = 3$ ，  $AP = 4$ ，

$$\text{因此 } V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 9 \times 4 = 12，$$

侧面积  $S = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PCD} = 27$ ， 故答案为.

14. 【答案】  $\frac{2}{3}l^2$ .

【解析】 如图，



在  $\triangle ABC$  中， 设  $AB = 2x$ ， 则  $AD = x$ ，

$$\text{根据余弦定理， } \cos A = \frac{4x^2 + x^2 - l^2}{2 \cdot 2x \cdot x} = \frac{5x^2 - l^2}{4x^2}，$$

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5x^2 - l^2}{4x^2}\right)^2}，$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A = \frac{1}{2} 2x \cdot 2x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5x^2 - l^2}{4x^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{16x^4 - (5x^2 - l^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-9x^4 + 10l^2x^2 - l^4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-9\left(x^2 - \frac{5}{9}l^2\right) + \frac{16}{9}l^4} \end{aligned}$$

当  $x^2 = \frac{5}{9}l^2$  时,  $\triangle ABC$  面积取最大值, 即  $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{2}{3}l^2$ , 故答案为:  $\frac{2}{3}l^2$ .