

石景山区 2015—2016 学年第一学期期末考试试卷

高三数学（文）

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

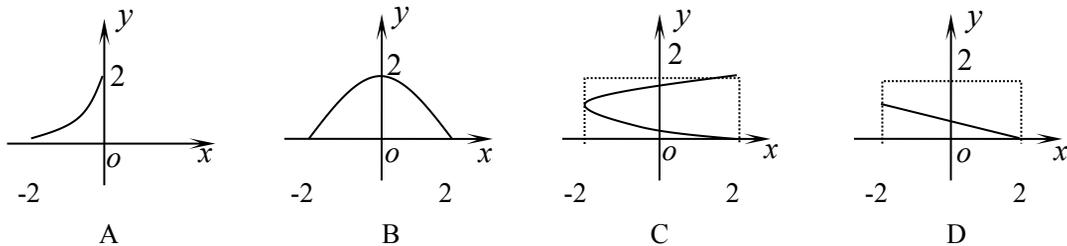
1. 设集合 $A = \{2, 5\}$ ，集合 $B = \{1, 2\}$ ，集合 $C = \{1, 2, 5, 7\}$ ，则 $(A \cup B) \cap C$ 为（ ）。

- A. $\{1, 2, 5\}$ B. $\{2, 5\}$ C. $\{2, 5, 7\}$ D. $\{1, 2, 5, 7\}$

2. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 2, \\ x \geq 1, \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2x + y$ 的最大值为（ ）。

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

3. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ，值域为 $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$ ，则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是（ ）。

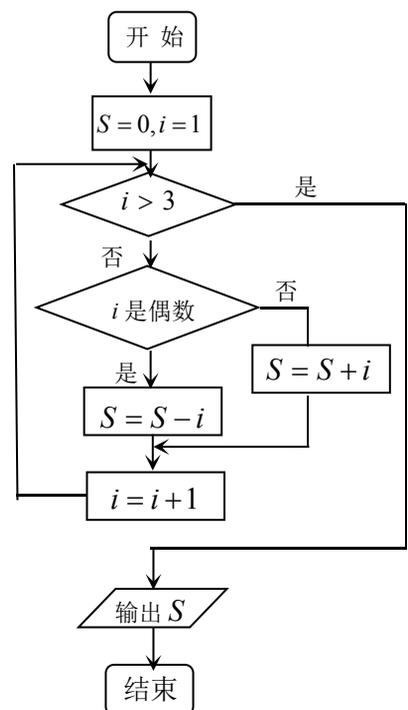


4. “ $a = 2$ ”是“直线 $2x + ay - 1 = 0$ 与直线 $ax + 2y - 2 = 0$ 平行”的（ ）。

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

5. 右面的程序框图表示算法的运行结果是（ ）。

- A. -2
B. 2
C. -1
D. 1





6. 若圆 C 的半径为1, 其圆心与点 $(1,0)$ 关于直线 $y=x$ 对称, 则圆 C 的标准方程为 ().

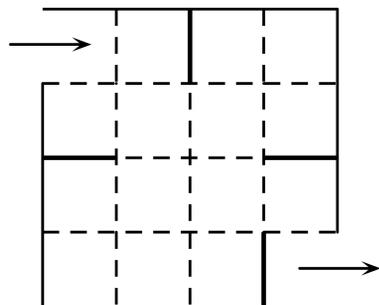
- A. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ B. $x^2 + (y+1)^2 = 1$
 C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ D. $(x+1)^2 + y^2 = 1$

7. 已知 $f(x) = x - 1$, 若 $|f(x)| \geq ax - 1$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $[0,1]$ B. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
 C. $[-1,1]$ D. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

8. 有一种走“方格迷宫”游戏, 游戏规则是每次水平或竖直走动一个方格, 走过的方格不能重复, 只要有一个方格不同即为不同走法. 现有如下图的方格迷宫, 图中的实线不能穿过, 则从入口走到出口共有多少种不同走法? ().

- A. 6
 B. 8
 C. 10
 D. 12



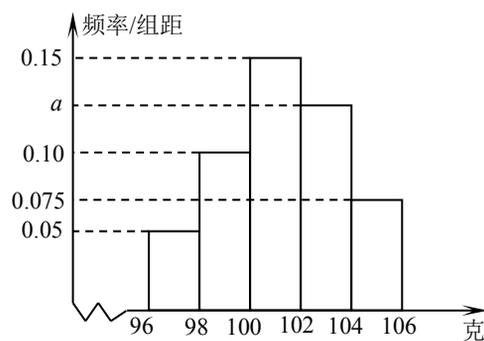
第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 复数 $i(1-i)$ 的实部为 _____.

10. 已知向量 $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (1, m)$, 若 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 则 $m =$ _____.

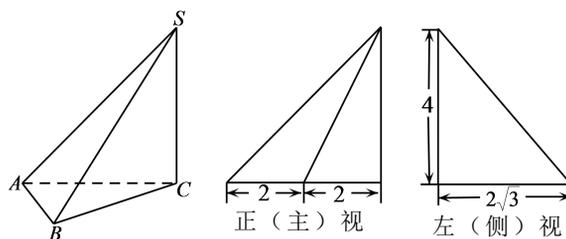
11. 某工厂对一批产品进行了抽样检测, 右图是根据抽样检测后的产品净重(单位:克)数据绘制的频率分布直方图, 其中产品净重的范围是 $[96, 106]$ 样本数据分组为 $[96, 98)$, $[98, 100)$, $[100, 102)$, $[102, 104)$, $[104, 106]$. 已知样本中产品净重小于 100 克的个数是 48, 则 $a =$ _____; 样本中净重在 $[98, 104)$ 的产品的个数是 _____.



12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . $a = 15, b = 10, A = 60^\circ$, 则 $\sin B =$ _____.



13. 三棱锥 $S-ABC$ 及其三视图中的正（主）视图和侧（左）视图如图所示，则棱 SB 的长为_____.



14. 股票交易的开盘价是这样确定的：每天开盘前，由投资者填报某种股票的意向买价或意向卖价以及相应的意向股数，然后由计算机根据这些数据确定适当的价格，使得在该价位上能够成交的股数最多。（注：当卖方意向价不高于开盘价，同时买方意向价不低于开盘价，能够成交）

根据以下数据，这种股票的开盘价为_____元，能够成交的股数为_____.

卖家意向价(元)	2.1	2.2	2.3	2.4
意向股数	200	400	500	100

买家意向价(元)	2.1	2.2	2.3	2.4
意向股数	600	300	300	100

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题共 13 分)

已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列， $a_1 = 1$ ，且 a_1, a_3, a_9 成等比数列。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项；

(II) 求数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和 S_n .



16. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.

- (I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期与单调增区间;
- (II) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值与最小值.



17. (本小题共 13 分)

编号为 A_1, A_2, \dots, A_{16} 的 16 名篮球运动员在某次训练比赛中的得分记录如下:

运动员编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

(I) 将得分在对应区间内的人数填入相应的空格;

区间	$[10, 20)$	$[20, 30)$	$[30, 40]$
人数			

(II) 从得分在区间 $[20, 30)$ 内的运动员中随机抽取 2 人,

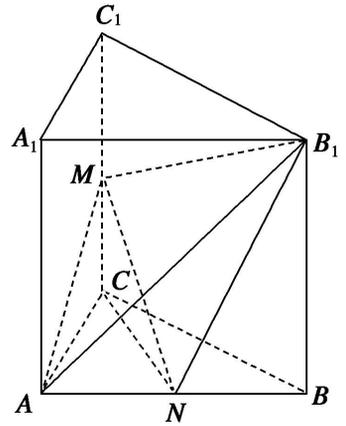
- (i) 用运动员的编号列出所有可能的抽取结果;
- (ii) 求这 2 人得分之和大于 50 的概率.



18. (本小题共 14 分)

如图, 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AC = BC = 2$, $AA_1 = 4$, $AB = 2\sqrt{2}$, M , N 分别是棱 CC_1 , AB 中点.

- (I) 求证: $CN \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;
- (II) 求证: $CN \parallel$ 平面 AMB_1 ;
- (III) 求三棱锥 $B_1 - AMN$ 的体积.





19. (本小题共 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 其中 $e = \frac{1}{2}$ (e 为椭圆离心率), 焦距为 2, 过点 $M(4, 0)$ 的直线 l 与

椭圆 C 交于点 A, B , 点 B 在 AM 之间. 又点 A, B 的中点横坐标为 $\frac{4}{7}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 求直线 l 的方程.



20. (本小题共 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m+1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{3} - mx$, $m \in \mathbf{R}$.

(I) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 求 m 的值;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 为增函数, 求 m 的取值范围;

(III) 在 (II) 的条件下, 函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有三个零点, 求 m 的取值范围.



石景山区 2015—2016 学年第一学期期末考试

高三数学（文）参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	A	B	C	C	B

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

题号	9	10	11	12	13	14
答案	1	7	0.125; 120	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$4\sqrt{2}$	2.2; 600

(14 题第一空 2 分，第二空 3 分)

三、解答题共 6 小题，共 80 分.

15. (本小题共 13 分)

解 (I) 由题设知公差 $d \neq 0$,

$$\text{由 } a_1=1, a_1, a_3, a_9 \text{ 成等比数列得 } \frac{1+2d}{1} = \frac{1+8d}{1+2d},$$

解得 $d=1, d=0$ (舍去),

故 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$.

(II) 由 (I) 知 $2^{a_n} = 2^n$, 由等比数列前 n 项和公式得

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{n+1} - 2.$$

16. (本小题共 13 分)

解: 解: $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - 1$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) - 1 = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 1.$$

(I) $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right], k \in \mathbf{Z}$.

(II) 因为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{1}{2} \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$,

于是 $1 \leq 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 2$, 所以 $0 \leq f(x) \leq 1$.



当且仅当 $x=0$ 时, $f(x)$ 取最小值 $f(x)_{\min} = f(0) = 0$.

当且仅当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时最大值 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

17. (本小题共 13 分)

(I) 解: 4, 6, 6

(II) 解 (i): 得分在区间 $[20,30)$ 内的运动员编号为 $A_3, A_4, A_5, A_{10}, A_{11}, A_{13}$ 从中随机抽取 2 人, 所有可能的抽取结果有:

$\{A_3, A_4\}, \{A_3, A_5\}, \{A_3, A_{10}\}, \{A_3, A_{11}\}, \{A_3, A_{13}\}, \{A_4, A_5\}, \{A_4, A_{10}\},$
 $\{A_4, A_{11}\}, \{A_4, A_{13}\}, \{A_5, A_{10}\}, \{A_5, A_{11}\}, \{A_5, A_{13}\}, \{A_{10}, A_{11}\}, \{A_{10}, A_{13}\}, \{A_{11}, A_{13}\},$

共 15 种.

(III) 解: “从得分在区间 $[20,30)$ 内的运动员中随机抽取 2 人, 这 2 人得分之和大于 50” (记为事件 B) 的所有可能结果有:

$\{A_4, A_5\}, \{A_4, A_{10}\}, \{A_4, A_{11}\}, \{A_5, A_{10}\}, \{A_{10}, A_{11}\}$, 共 5 种.

$$\text{所以 } P(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

18. (本小题共 14 分)

解: (I) 证明: 因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,

$AA_1 \perp$ 底面 ABC ,

又因为 $CN \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp CN$.

因为 $AC = BC = 2$, N 是 AB 中点,

所以 $CN \perp AB$.

因为 $AA_1 \cap AB = A$,

所以 $CN \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

(II) 证明: 取 AB_1 的中点 G , 连结 MG, NG , 因为 N, G 分别是棱

AB, AB_1 中点, 所以 $NG \parallel BB_1, NG = \frac{1}{2}BB_1$.

又因为 $CM \parallel BB_1, CM = \frac{1}{2}BB_1$,

所以 $CM \parallel NG, CM = NG$. 所以四边形 $CNGM$ 是平行四边形.

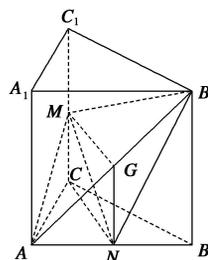
所以 $CN \parallel MG$.

因为 $CN \not\subset$ 平面 $AMB_1, MG \subset$ 平面 AMB_1 ,

所以 $CN \parallel$ 平面 AMB_1 .

(III) 由 (II) 知 $MG \perp$ 平面 AB_1N .

$$\text{所以 } V_{B_1-AMN} = V_{M-AB_1N} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 4 \times \sqrt{2} = \frac{4}{3}.$$



19. (本小题共 13 分)

解: (I) 由条件可知, $c=1, a=2$, 故 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,



椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 由已知 A, B, M 三点共线,

设点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$.

若直线 $AB \perp x$ 轴, 则 $x_1 = x_2 = 4$, 不合题意.

当 AB 所在直线 l 的斜率 k 存在时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 4)$.

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x - 4) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$$

消去 y 得, $(3 + 4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0$. ①

由①的判别式 $\Delta = 322k^4 - 4(4k^2 + 3)(64k^2 - 12) = 144(1 - 4k^2) > 0$,

解得 $k^2 < \frac{1}{4}$,

$$x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{4k^2 + 3}, \quad x_1x_2 = \frac{64k^2 - 12}{4k^2 + 3}.$$

由 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{16k^2}{4k^2 + 3} = \frac{4}{7}$, 可得 $k^2 = \frac{1}{8}$, 即有 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$.

即所求直线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(x - 4)$.

20. (本小题共 14 分)

解: (I) $f'(x) = x^2 - (m + 1)x$

由 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 得 $f'(1) = 1 - (m + 1) = 0$,

所以 $m = 0$ (经检验适合题意)

(II) $f'(x) = x^2 - (m + 1)x$, 因为 $f(x)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 为增函数,

所以 $x^2 - (m + 1)x = x(x - m - 1) \geq 0$ 在区间 $(2, +\infty)$ 恒成立,

所以 $x(x - m - 1) \geq 0$ 恒成立, 即 $m \leq x - 1$ 恒成立,

由于 $x > 2$, 得 $m \leq 1$.

所以 m 的取值范围是 $m \leq 1$.

$$(III) h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m+1}{2}x^2 + mx - \frac{1}{3},$$

故 $h'(x) = x^2 - (m + 1)x + m = (x - 1)(x - m) = 0$, 得 $x = m$ 或 $x = 1$

当 $m = 1$ 时, $h'(x) = (x - 1)^2 \geq 0$, $h(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 显然不合题意.

当 $m < 1$ 时, $f(x)$, $f'(x)$ 随 x 的变化情况如下表:



x	$(-\infty, m)$	m	$(m, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h(x)$	+	0	-	0	+
$h'(x)$	Z	极大值 $-\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{3}$]	极小值 $\frac{m-1}{2}$	Z

要使 $f(x) - g(x)$ 有三个零点, 故需
$$\begin{cases} -\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{3} > 0 \\ \frac{m-1}{2} < 0 \end{cases},$$

即
$$\begin{cases} (m-1)(m^2 - 2m - 2) < 0 \\ m < 1 \end{cases}, \text{ 解得 } m < 1 - \sqrt{3}$$

所以 m 的取值范围是 $m < 1 - \sqrt{3}$.



选填解析

一、 选择题

1. 【答案】A

【解析】 $A \cup B = \{1, 2, 5\}$, 则 $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 5\}$.

故选 A.

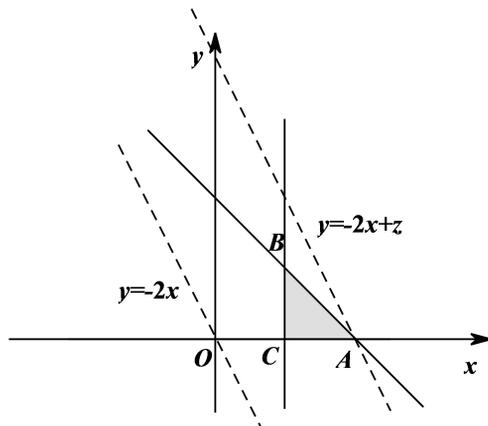
2. 【答案】D

【解析】 x, y 的满足 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的区域为如图所示

的阴影, 直线 $y = -2x$ 平移到点 $A(2, 0)$ 时, 截距最大,

此时 $z_{\max} = 2 \times 2 + 0 = 4$.

故选 D.



3. 【答案】B

【解析】对于 A, 函数的定义域为 $[-2, 0]$, 不满足

题意;

对于 C, 不是函数, 不满足题意;

对于 A, 函数的值域为 $[0, 1]$, 不满足题意;

只有 B 满足题意.

故选 B.

4. 【答案】A

【解析】当 $a = 2$ 时, 直线 $2x + 2y - 1 = 0$ 与直线 $2x + 2y - 2 = 0$ 平行, 充分性满足;

当直线 $2x + ay - 1 = 0$ 与直线 $ax + 2y - 2 = 0$ 平行, 可得 $2 \times 2 - a^2 = 0$,

即 $a = \pm 2$, 必要性不满足.

故选 A.

5. 【答案】B

【解析】列表:

	开始	第1步	第2步	第3步	结束
i	1	2	3	4	$4 > 3$
S	0	1	-1	2	2

显然, 当 $i = 4$, 循环结束输出 2.



故选 B.

6. 【答案】C

【解析】设圆心与点(1,0)所确定的直线 $l: y = k(x-1)$,

由于 l 与直线 $y = x$ 垂直, 所以 $k = -1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

所以, 圆心关于 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 对称点为(1,0),

故圆心为(0,1), 圆的方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

故答案为 C.

7. 【答案】C

【解析】当 $x \geq 1$ 时, $|f(x)| \geq ax - 1 \Leftrightarrow ax - x \leq 0$ 恒成立, 即 $a \leq 1$;

当 $x < 1$ 时, $|f(x)| \geq ax - 1 \Leftrightarrow ax + x - 2 \leq 0$,

①当 $x = 0$ 时, $a \in \mathbf{R}$;

②当 $0 < x < 1$ 时, $a \leq \frac{2}{x} - 1$ 恒成立, 即 $a \leq 1$;

③当 $x < 0$ 时, $a \geq \frac{2}{x} - 1$ 恒成立, 即 $a \geq -1$;

综上, $a \in [-1, 1]$.

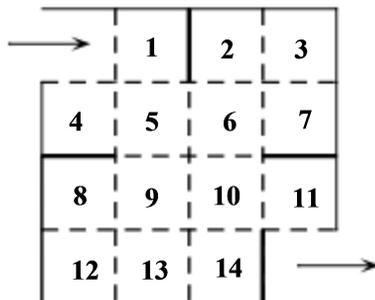
故答案选 C

8. 【答案】B

【解析】如图: 走出迷宫的方式方法如下:

$$1-5- \begin{cases} 8-12-13-14-10-11 \\ 9- \begin{cases} 13-14-10-11 \\ 10-11 \end{cases} \\ 6-10-11 \end{cases};$$

$$4-5- \begin{cases} 8-12-13-14-10-11 \\ 9- \begin{cases} 13-14-10-11 \\ 10-11 \end{cases} \\ 6-10-11 \end{cases},$$



共8种.

故答案选 B.

二、 填空题

9. 【答案】 1

【解析】 $i(1-i)=i+1$ ，实部为1.

故答案为1.

10. 【答案】 7

【解析】 $\vec{a}-\vec{b}=(-4,4-m)$ ， $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\Leftrightarrow(-3)\times(-4)+4\times(4-m)=0$ ，

即 $4m=28$ ，解得 $m=7$.

故答案为7.

11. 【答案】 0.125；120

【解析】 由题可知， $(0.05+0.075+0.1+a+0.15)\times 2=1\Rightarrow a=0.125$ ；

设样品容量为 n 由图可知，

样本中产品净重小于100克的频率为 $(0.05+0.1)\times 2=0.3$ ，

则 $\frac{48}{n}=0.3\Rightarrow n=160$ ，

所以，样本中净重在 $[98,104)$ 的产品的个数是

$160\times(0.1+0.125+0.15)\times 2=120$.

故答案为0.125；120

12. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 由正弦定理可知，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. 【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】 由三视图可知， $\triangle ABC$ 是以 $AB=4$ 为底， $h=2\sqrt{3}$ 为高的等腰三角形，

所以， $BC=\sqrt{4+12}=4$ ，



在 $\text{Rt}\triangle SCB$ 中, $SB = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

故答案为 $4\sqrt{2}$

14. 【答案】 2.2； 600

【解析】当开盘价为 2.1 时，在该价位上能够成交的股数为 200，

当开盘价为 2.2 时，在该价位上能够成交的股数为 600，

当开盘价为 2.3 时，在该价位上能够成交的股数为 400，

当开盘价为 2.4 时，在该价位上能够成交的股数为 100，

所以当开盘价为 2.2 时，在该价位上能够成交的股数为最多，为 600。

故答案为 2.2； 600