

北京市朝阳区 2015-2016 学年度高三年级第一学期期末统一考试

### 数学试卷（理工类）

2016. 1

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

#### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $M = \{x | -1 < x < 1\}$ ,  $N = \left\{x \mid \frac{x}{x-1} \leq 0\right\}$ , 则  $M \cap N =$

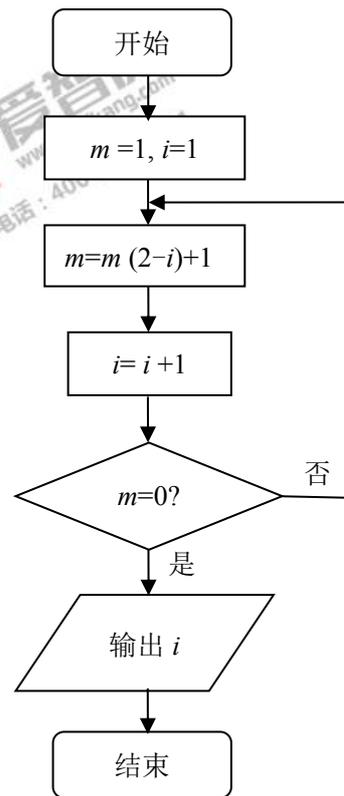
- A.  $\{x | 0 \leq x < 1\}$       B.  $\{x | 0 < x < 1\}$       C.  $\{x | x \geq 0\}$       D.  $\{x | -1 < x \leq 0\}$

2. 复数  $z = i(1+i)$  ( $i$  是虚数单位) 在复平面内所对应点的坐标为

- A. (1,1)      B. (-1,-1)      C. (1,-1)      D. (-1,1)

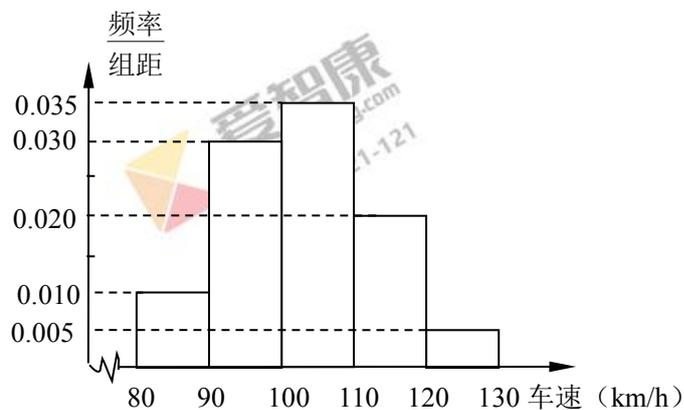
3. 执行如图所示的程序框图，则输出的  $i$  值为

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6



4. 在一段时间内有 2000 辆车通过高速公路上的某处，现随机抽取其中的 200 辆进行车速统计，统计结果如下面的频率分布直方图所示. 若该处高速公路规定正常行驶速度为 90 km/h~120 km/h，试估计 2000 辆车中，在这段时间内以正常速度通过该处的汽车约有

- A. 30 辆      B. 300 辆      C. 170 辆      D. 1700 辆



5. “ $a > 1$ ”是“函数  $f(x) = a \cdot x + \cos x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增”的

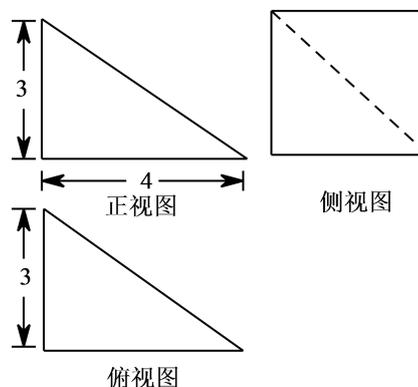
- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件

6. 已知点  $Q(2\sqrt{2}, 0)$  及抛物线  $x^2 = 4y$  上一动点  $P(x, y)$ ，则  $y + |PQ|$  的最小值是

- A.  $\frac{1}{2}$       B. 1      C. 2      D. 3

7. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的侧面积是

- A. 27      B. 30  
C. 32      D. 36



8. 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$ ，如果存在正实数  $m$ ，使得对任意  $x \in D$ ，都有  $f(x+m) > f(x)$ ，

则称  $f(x)$  为  $D$  上的“ $m$ 型增函数”. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x > 0$  时,  $f(x) = |x - a| - a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ). 若  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的“20型增函数”, 则实数  $a$  的取值范围是

- A.  $a > 0$                       B.  $a < 5$                       C.  $a < 10$                       D.  $a < 20$

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9. 函数  $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$  的最小正周期是\_\_\_\_\_, 最小值是\_\_\_\_\_.

10. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \leq 2, \\ 2x + y \geq 1, \\ y \leq 1, \end{cases}$  则  $z = x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

11. 在各项均为正数的等比数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_2 = 2$ , 则  $a_1 + 2a_3$  的最小值是\_\_\_\_\_.

12. 甲、乙、丙、丁四名同学和一名老师站成一排合影留念. 要求老师必须站在正中间, 甲同学不与老师相邻, 则不同站法种数为\_\_\_\_\_.

13. 已知  $A, B$  为圆  $C: (x - m)^2 + (y - n)^2 = 9$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ) 上两个不同的点 ( $C$  为圆心), 且满足  $|\overline{CA} + \overline{CB}| = 2\sqrt{5}$ , 则  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知点  $O$  在  $\triangle ABC$  的内部, 且有  $x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC} = \mathbf{0}$ , 记  $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle AOC$  的面积分别为  $S_{\triangle AOB}, S_{\triangle BOC}, S_{\triangle AOC}$ . 若  $x = y = z = 1$ , 则  $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} =$ \_\_\_\_\_;  
若  $x = 2, y = 3, z = 4$ , 则  $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题满分 13 分)

某中学高一年级共 8 个班，现从高一年级选 10 名同学组成社区服务小组，其中高一(1)班选取 3 名同学，其它各班各选取 1 名同学。现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学，到社区老年中心参加“尊老爱老”活动(每位同学被选到的可能性相同)。

(I) 求选出的 3 名同学来自不同班级的概率；

(II) 设  $X$  为选出同学中高一(1)班同学的人数，求随机变量  $X$  的分布列和数学期望。

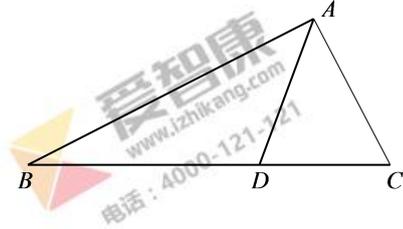


16. (本小题满分 13 分)

如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在  $BC$  边上,  $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$ ,  $AC = \frac{7}{2}$ ,  $\cos \angle ADB = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ .

(I) 求  $\sin \angle C$  的值;

(II) 若  $BD = 5$ , 求  $\triangle ABD$  的面积.

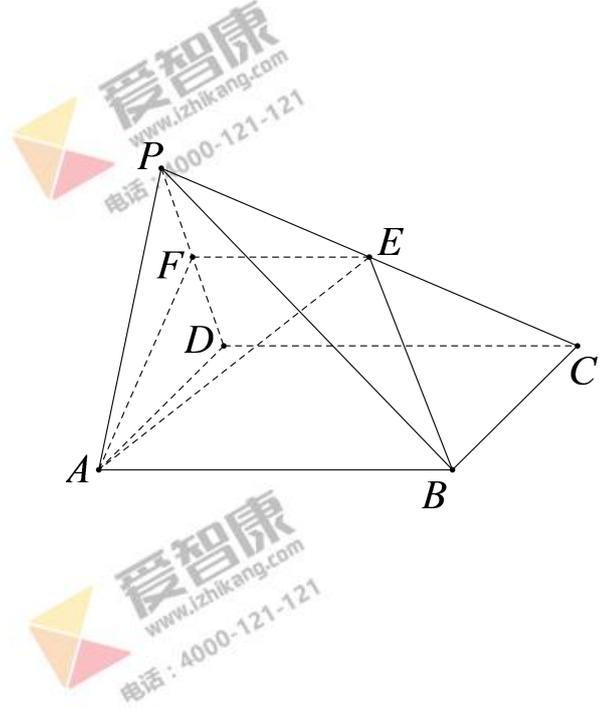


17. (本小题满分 13 分)

如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是菱形，且  $\angle DAB = 60^\circ$ . 点  $E$  是棱  $PC$  的中点，平面  $ABE$  与棱  $PD$  交于点  $F$ .

(I) 求证:  $AB \parallel EF$ ;

(II) 若  $PA = PD = AD$ , 且平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 求平面  $PAF$  与平面  $AFE$  所成的锐二面角的余弦值.



18. (本小题满分 14 分)

已知函数  $f(x) = ax + \ln x$ ，其中  $a \in \mathbf{R}$ 。

(I) 若  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上为增函数，求  $a$  的取值范围；

(II) 当  $a = -e$  时，

(i) 证明： $f(x) + 2 \leq 0$ ；

(ii) 试判断方程  $|f(x)| = \frac{\ln x}{x} + \frac{3}{2}$  是否有实数解，并说明理由。

19. (本小题满分 14 分)

已知圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  的切线  $l$  与椭圆  $C: x^2 + 3y^2 = 4$  相交于  $A, B$  两点.

(I) 求椭圆  $C$  的离心率;

(II) 求证:  $OA \perp OB$ ;

(III) 求  $\triangle OAB$  面积的最大值.



20. (本小题满分 13 分)

已知有穷数列:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $k \geq 3$ ) 的各项均为正数, 且满足条件:

①  $a_1 = a_k$ ; ②  $a_n + \frac{2}{a_n} = 2a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}}$  ( $n=1, 2, 3, \dots, k-1$ ).

(I) 若  $k=3$ ,  $a_1=2$ , 求出这个数列;

(II) 若  $k=4$ , 求  $a_1$  的所有取值的集合;

(III) 若  $k$  是偶数, 求  $a_1$  的最大值 (用  $k$  表示).

北京市朝阳区 2015-2016 学年度第一学期期末高三年级统一考试

数学答案（理工类）

2016. 1

一、选择题：（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	D	A	C	A	B

二、填空题：（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14	
答案	$\pi, -1$	4	$4\sqrt{2}$	12	4	1:1:1	4:2:3

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：（满分 80 分）

15.（本小题满分 13 分）

解：（I）设“选出的 3 名同学来自不同班级”为事件  $A$ ,

$$P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^2 + C_3^0 \cdot C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{49}{60}.$$

所以选出的 3 名同学来自班级的概率为  $\frac{49}{60}$ .

（II）随机变量  $X$  的所有可能值为 0, 1, 2, 3, 则

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 \cdot C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}; \quad P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40};$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{40}; \quad P(X=3) = \frac{C_3^3 \cdot C_7^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

所以随机变量  $X$  的分布列是

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

随机变量  $X$  的数学期望

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}.$$

16.（本小题满分 13 分）

解：(I) 因为  $\cos \angle ADB = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ ，所以  $\sin \angle ADB = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ 。

又因为  $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$ ，所以  $\angle C = \angle ADB - \frac{\pi}{4}$ 。

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin \angle C &= \sin(\angle ADB - \frac{\pi}{4}) = \sin \angle ADB \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos \angle ADB \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{10}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

(II) 在  $\triangle ACD$  中，由  $\frac{AD}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$ ，

$$\text{得 } AD = \frac{AC \cdot \sin \angle C}{\sin \angle ADC} = \frac{7 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BD \cdot \sin \angle ADB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7.$$

17. (本小题满分 13 分)

(I) 证明：因为底面  $ABCD$  是菱形，

所以  $AB \parallel CD$ 。

又因为  $AB \not\subset$  面  $PCD$ ， $CD \subset$  面  $PCD$ ，

所以  $AB \parallel$  面  $PCD$ 。

又因为  $A, B, E, F$  四点共面，

且平面  $ABEF \cap$  平面  $PCD = EF$ ，

所以  $AB \parallel EF$ 。

(II) 取  $AD$  中点  $G$ ，连接  $PG, GB$ 。

因为  $PA = PD$ ，所以  $PG \perp AD$ 。

又因为平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ，

且平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$ ，

所以  $PG \perp$  平面  $ABCD$ 。所以  $PG \perp GB$ 。

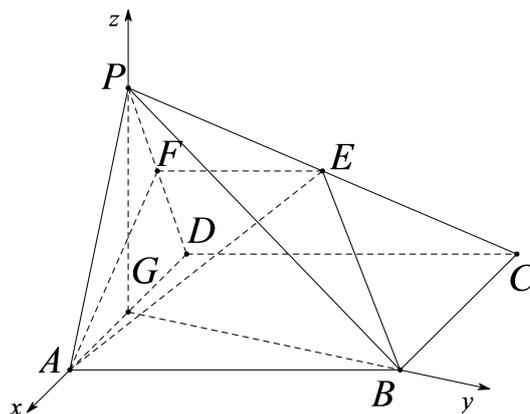
在菱形  $ABCD$  中，因为  $AB = AD$ ，

$\angle DAB = 60^\circ$ ， $G$  是  $AD$  中点，

所以  $AD \perp GB$ 。

如图，建立空间直角坐标系  $G-xyz$ 。设  $PA = PD = AD = 2a$ ，

则  $G(0,0,0)$ ， $A(a,0,0)$ ，



$$B(0, \sqrt{3}a, 0), C(-2a, \sqrt{3}a, 0), D(-a, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}a).$$

又因为  $AB \parallel EF$ ，点  $E$  是棱  $PC$  中点，

所以点  $F$  是棱  $PD$  中点。

$$\text{所以 } E\left(-a, \frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), F\left(-\frac{a}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AF} = \left(-\frac{3a}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), \overrightarrow{EF} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right).$$

$$\text{设平面 } AFE \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (x, y, z), \text{ 则有 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} z = \sqrt{3}x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$$

令  $x = 3$ ，则平面  $AFE$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (3, \sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ 。

因为  $BG \perp$  平面  $PAD$ ，所以  $\overrightarrow{GB} = (0, \sqrt{3}a, 0)$  是平面  $PAF$  的一个法向量。

$$\text{因为 } \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{GB} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{GB}}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{GB}|} = \frac{3a}{\sqrt{39} \cdot \sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{13}}{13},$$

所以平面  $PAF$  与平面  $AFE$  所成的锐二面角的余弦值为  $\frac{\sqrt{13}}{13}$ 。

18. (本小题满分 14 分)

解：函数  $f(x)$  定义域  $x \in (0, +\infty)$ ， $f'(x) = a + \frac{1}{x}$ 。

(I) 因为  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上为增函数，所以  $f'(x) \geq 0$  在  $x \in [1, 2]$  上恒成立，

$$\text{即 } f'(x) = a + \frac{1}{x} \geq 0, a \geq -\frac{1}{x} \text{ 在 } x \in [1, 2] \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{则 } a \geq -\frac{1}{2}.$$

(II) 当  $a = -e$  时， $f(x) = -ex + \ln x$ ， $f'(x) = \frac{-ex + 1}{x}$ 。

(i) 令  $f'(x) = 0$ ，得  $x = \frac{1}{e}$ 。

令  $f'(x) > 0$ ，得  $x \in (0, \frac{1}{e})$ ，所以函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{e})$  单调递增。

令  $f'(x) < 0$ ，得  $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ ，所以函数  $f(x)$  在  $(\frac{1}{e}, +\infty)$  单调递减。

$$\text{所以, } f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -e \cdot \frac{1}{e} + \ln \frac{1}{e} = -2.$$

所以  $f(x) + 2 \leq 0$  成立。

(ii) 由 (i) 知， $f(x)_{\max} = -2$ ，所以  $|f(x)| \geq 2$ 。

设  $g(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{3}{2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ . 所以  $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

令  $g'(x) = 0$ , 得  $x = e$ .

令  $g'(x) > 0$ , 得  $x \in (0, e)$ , 所以函数  $g(x)$  在  $(0, e)$  单调递增,

令  $g'(x) < 0$ , 得  $x \in (e, +\infty)$ , 所以函数  $g(x)$  在  $(e, +\infty)$  单调递减:

所以,  $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{\ln e}{e} + \frac{3}{2} = \frac{1}{e} + \frac{3}{2} < 2$ , 即  $g(x) < 2$ .

所以  $|f(x)| > g(x)$ , 即  $|f(x)| > \frac{\ln x}{x} + \frac{3}{2}$ .

所以, 方程  $|f(x)| = \frac{\ln x}{x} + \frac{3}{2}$  没有实数解.

19. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意可知  $a^2 = 4$ ,  $b^2 = \frac{4}{3}$ , 所以  $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{8}{3}$ .

所以  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . 所以椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

(II) 若切线  $l$  的斜率不存在, 则  $l: x = \pm 1$ .

在  $\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = 1$  中令  $x = 1$  得  $y = \pm 1$ .

不妨设  $A(1, 1)$ ,  $B(1, -1)$ , 则  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 1 - 1 = 0$ . 所以  $OA \perp OB$ .

同理, 当  $l: x = -1$  时, 也有  $OA \perp OB$ .

若切线  $l$  的斜率存在, 设  $l: y = kx + m$ , 依题意  $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ , 即  $k^2 + 1 = m^2$ .

由  $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$ , 得  $(3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 4 = 0$ . 显然  $\Delta > 0$ .

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = -\frac{6km}{3k^2 + 1}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 4}{3k^2 + 1}$ .

所以  $y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$ .

所以  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (k^2 + 1)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$

$$\begin{aligned} &= (k^2 + 1) \frac{3m^2 - 4}{3k^2 + 1} - km \frac{6km}{3k^2 + 1} + m^2 \\ &= \frac{(k^2 + 1)(3m^2 - 4) - 6k^2 m^2 + (3k^2 + 1)m^2}{3k^2 + 1} \\ &= \frac{4m^2 - 4k^2 - 4}{3k^2 + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{4(k^2+1)-4k^2-4}{3k^2+1} = 0.$$

所以  $OA \perp OB$ .

综上所述, 总有  $OA \perp OB$  成立.

(III) 因为直线  $AB$  与圆  $O$  相切, 则圆  $O$  半径即为  $\triangle OAB$  的高,

当  $l$  的斜率不存在时, 由 (II) 可知  $|AB| = 2$ .

则  $S_{\triangle OAB} = 1$ .

当  $l$  的斜率存在时, 由 (II) 可知,

$$|AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{6km}{3k^2+1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3m^2-4}{3k^2+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1} \cdot \sqrt{9k^2m^2 - (3m^2-4)(3k^2+1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1} \cdot \sqrt{12k^2 - 3m^2 + 4} = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1} \cdot \sqrt{12k^2 - 3(k^2+1) + 4}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1} \cdot \sqrt{9k^2+1}.$$

$$\text{所以 } |AB|^2 = \frac{4(1+k^2)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2} = \frac{4(9k^4+10k^2+1)}{9k^4+6k^2+1} = 4\left(1 + \frac{4k^2}{9k^4+6k^2+1}\right)$$

$$= 4 + 16 \cdot \frac{k^2}{9k^4+6k^2+1} = 4 + \frac{16}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

(当且仅当  $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  时, 等号成立).

$$\text{所以 } |AB| \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ 此时, } (S_{\triangle OAB})_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

综上所述, 当且仅当  $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  时,  $\triangle OAB$  面积的最大值为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

20. (本小题满分 13 分)

解: (I) 因为  $k=3$ ,  $a_1=2$ , 由①知  $a_3=2$ ;

由②知,  $2a_2 + \frac{1}{a_2} = a_1 + \frac{2}{a_1} = 3$ , 整理得,  $2a_2^2 - 3a_2 + 1 = 0$ . 解得,  $a_2=1$  或  $a_2 = \frac{1}{2}$ .

当  $a_2=1$  时, 不满足  $a_2 + \frac{2}{a_2} = 2a_3 + \frac{1}{a_3}$ , 舍去;

所以, 这个数列为  $2, \frac{1}{2}, 2$ .

(II) 若  $k=4$ , 由①知  $a_4 = a_1$ .

因为  $a_n + \frac{2}{a_n} = 2a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}}$  ( $n=1,2,3$ ), 所以  $(a_n - 2a_{n+1})(1 - \frac{1}{a_n a_{n+1}}) = 0$ .

所以  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$  或  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$  ( $n=1,2,3$ ).

如果由  $a_1$  计算  $a_4$  没有用到或者恰用了 2 次  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ , 显然不满足条件;

所以由  $a_1$  计算  $a_4$  只能恰好 1 次或者 3 次用到  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ , 共有下面 4 种情况:

(1) 若  $a_2 = \frac{1}{a_1}$ ,  $a_3 = \frac{1}{2}a_2$ ,  $a_4 = \frac{1}{2}a_3$ , 则  $a_4 = \frac{1}{4a_1} = a_1$ , 解得  $a_1 = \frac{1}{2}$ ;

(2) 若  $a_2 = \frac{1}{2}a_1$ ,  $a_3 = \frac{1}{a_2}$ ,  $a_4 = \frac{1}{2}a_3$ , 则  $a_4 = \frac{1}{a_1} = a_1$ , 解得  $a_1 = 1$ ;

(3) 若  $a_2 = \frac{1}{2}a_1$ ,  $a_3 = \frac{1}{2}a_2$ ,  $a_4 = \frac{1}{a_3}$ , 则  $a_4 = \frac{4}{a_1} = a_1$ , 解得  $a_1 = 2$ ;

(4) 若  $a_2 = \frac{1}{a_1}$ ,  $a_3 = \frac{1}{a_2}$ ,  $a_4 = \frac{1}{a_3}$ , 则  $a_4 = \frac{1}{a_1} = a_1$ , 解得  $a_1 = 1$ ;

综上,  $a_1$  的所有取值的集合为  $\{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ .

(III) 依题意, 设  $k=2m$ ,  $m \in \mathbf{N}^*$ ,  $m \geq 2$ .

由 (II) 知,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$  或  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$  ( $n=1,2,3,\dots,2m-1$ ).

假设从  $a_1$  到  $a_{2m}$  恰用了  $i$  次递推关系  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ ,

用了  $2m-1-i$  次递推关系  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ ,

则有  $a_{2m} = (\frac{1}{2})^t \cdot a_1^{(-1)^i}$ , 其中  $|t| \leq 2m-1-i, t \in \mathbf{Z}$ .

当  $i$  是偶数时,  $t \neq 0$ ,  $a_{2m} = (\frac{1}{2})^t \cdot a_1 = a_1$  无正数解, 不满足条件;

当  $i$  是奇数时, 由  $a_{2m} = (\frac{1}{2})^t \cdot a_1^{-1} = a_1$ ,  $|t| \leq 2m-1-i \leq 2m-2$

得  $a_1^2 = (\frac{1}{2})^t \leq 2^{2m-2}$ , 所以  $a_1 \leq 2^{m-1}$ .

又当  $i=1$  时, 若  $a_2 = \frac{1}{2}a_1$ ,  $a_3 = \frac{1}{2}a_2$ ,  $\dots$ ,  $a_{2m-1} = \frac{1}{2}a_{2m-2}$ ,  $a_{2m} = \frac{1}{a_{2m-1}}$ ,

有  $a_{2m-1} = (\frac{1}{2})^{2m-2} \cdot a_1$ ,  $a_{2m} = \frac{2^{2m-2}}{a_1} = a_1$ , 即  $a_1 = 2^{m-1}$ .

所以,  $a_1$  的最大值是  $2^{m-1}$ . 即  $a_1 = 2^{\frac{k}{2}-1}$ .

北京市朝阳区 2015-2016 学年度第一学期期末高三年级统一考试

### 数学答案及解析（理工类）

1. 【答案】A.

【解析】集合  $N = \{x | 0 \leq x < 1\}$ ，因此  $M \cap N = \{x | 0 \leq x < 1\}$ ，故答案选 A.

2. 【答案】D.

【解析】复数  $z = i(1+i) = i + i^2 = -1 + i$ ，复平面内所对应点的坐标为  $(-1, 1)$ ，故答案选 D.

3. 【答案】B.

【解析】根据程序框图，

第一次循环： $m = 1 \times (2 - 1) + 1 = 2$ ， $i = 2$ ；

第二次循环： $m = 2 \times (2 - 2) + 1 = 1$ ， $i = 3$ ；

第三次循环： $m = 1 \times (2 - 3) + 1 = 0$ ， $i = 4$ ；

结束循环， $i = 4$ ，故选 B.

4. 【答案】D.

【解析】根据频率分布直方图可知，

正常行驶速度为  $90 \text{ km/h} \sim 120 \text{ km/h}$  的频率为： $(0.030 + 0.035 + 0.020) \times 10 = 0.85$ ，

因此在这段时间内以正常速度通过该处的汽车约有： $2000 \times 0.85 = 1700$ ，故选 D.

5. 【答案】A.

【解析】 $f'(x) = a - \sin x$ ，由于  $a > 1$  且  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，所以  $f'(x) > 0$ ，

因此函数  $f(x) = a \cdot x + \cos x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增，

反之，若函数  $f(x) = a \cdot x + \cos x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增，

需满足  $f'(x) = a - \sin x \geq 0$ ，即  $a \geq \sin x$ ，因此  $a \geq 1$ 。

综上“ $a > 1$ ”是“函数  $f(x) = a \cdot x + \cos x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增”的充分不必要条件，

故选 A.

6. 【答案】C.

【解析】由题可知抛物线的焦点坐标  $F(0, 1)$ ，准线方程为  $y = -1$ ，

而  $y + |PQ| = y + 1 + |PQ| - 1$ ，根据抛物线的定义  $y + 1 = |PF|$ ，

即  $y + |PQ| = |PF| + |PQ| - 1$ , 当  $|PF| + |PQ| = |FQ|$  时,  $y + |PQ|$  取得最小值,

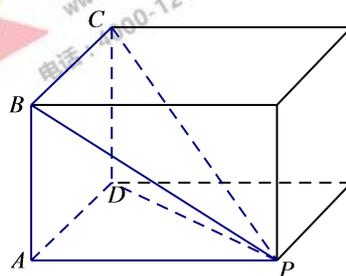
因此,  $(y + |PQ|)_{\min} = |FQ| - 1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} - 1 = 2$ , 故选 C.

7. 【答案】A.

【解析】在长方体中还原四棱锥如图所示, 根据三视图,

在四棱锥  $P-ABCD$ ,  $AB = AD = 3$ ,  $AP = 4$ ,

因此侧面积  $S = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PCD} = 27$ , 故选 A.



8. 【答案】B.

【解析】因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 所以  $f(0) = 0$ .

当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 所以  $f(-x) = |-x - a| - a = |x + a| - a$ ,

所以  $f(x) = -f(-x) = -|x + a| + a$ .

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} |x - a| - a, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -|x + a| + a, & x < 0 \end{cases}$$

分类讨论:

①当  $x > 0$  时, 由  $f(x+20) > f(x)$ , 可得  $|x+20-a| - a > |x-a| - a$ ,

化为  $|x - (a-20)| > |x-a|$ , 由绝对值的几何意义可得,

$a + a - 20 < 0$ , 解得  $a < 10$ ;

②当  $x < 0$  时, 由  $f(x+20) > f(x)$ , 分为以下两个类型研究:

(i) 当  $x+20 < 0$  时, 可得  $-|x+20+a| + a > -|x+a| + a$ ,

化为  $|x+20+a| > |x+a|$ , 由绝对值的几何意义可得,

$-a - a - 20 > 0$ , 解得  $a < 10$ .

(ii) 当  $x+20 > 0$  时, 可得  $|x+20-a|-a > -|x+a|+a$ ,

化为  $|x+20-a|+|x+a| > 2a$ , 因为  $|x+20-a|+|x+a| \geq |20-2a|$ ,

因此  $|20-2a| > 2a$ , 当  $a \leq 0$  时, 恒成立, 当  $a > 0$  时,  $a < 5$ ;

③ 当  $x=0$  时, 由  $f(20) > f(0)$ , 可得  $|20-a|-a > 0$ ,

当  $a \leq 0$  时, 恒成立, 当  $a > 0$  时,  $a < 10$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围是  $a < 5$ , 故选 B.

9. 【答案】  $\pi$ ;  $-1$ .

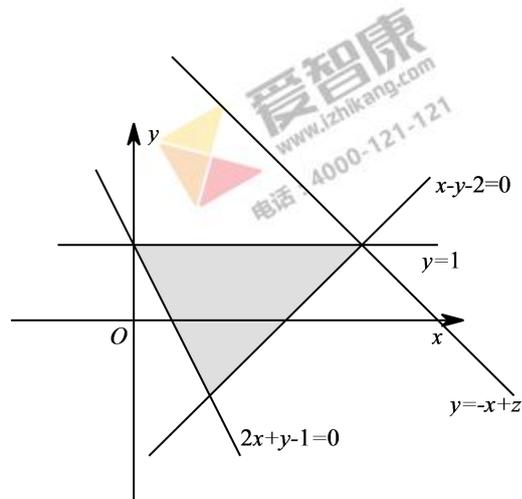
【解析】 最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , 当  $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$  时,  $y$  最小值且为  $-1$ .

故答案为:  $\pi$ ;  $-1$ .

10. 【答案】 4.

【解析】 可行域如图所示, 由图可知,  $z = x + y$  在点  $(3,1)$  处取得最大值, 即  $z_{\max} = 4$ ,

故答案为: 4.



11. 【答案】  $4\sqrt{2}$ .

【解析】 设等比数列的公比为  $q$ ,  $q > 0$ ,

根据题意,  $a_1 + 2a_3 = \frac{a_2}{q} + 2a_2 \cdot q = \frac{2}{q} + 4q \geq 4\sqrt{2}$ ,

当且仅当  $\frac{2}{q} = 4q$  时等号成立, 即  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时,

$a_1 + 2a_3$  的最小值是  $4\sqrt{2}$ . 故答案为:  $4\sqrt{2}$ .

12. 【答案】 12.

【解析】 根据题意, 老师必须站在正中间只有一种排法, 而甲同学不与老师相邻, 只能

排在两端，有两种方法，其他人没有限制，因此不同站法种数为： $2A_3^3 = 12$ ，

故答案为：12.

13. 【答案】4.

【解析】根据  $|\overline{CA} + \overline{CB}| = 2\sqrt{5}$  可知，圆心到弦  $|AB|$  的距离  $d = \sqrt{5}$ ，

因此弦长  $|AB| = 2\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 4$ ，故答案为：4.

14. 【答案】1:1:1； 4:2:3.

【解析】根据题意当  $x = y = z = 1$  时， $O$  为  $\triangle ABC$  的重心，

由相似可得， $\triangle AOB$ ， $\triangle BOC$ ， $\triangle AOC$  的面积均为  $\triangle ABC$  面积的  $\frac{1}{3}$ ，因此

$$S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = 1:1:1;$$

设  $\triangle DEF$  为等边三角形，且  $O$  是其重心，则有  $\overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} = \mathbf{0}$ ，

设  $\overline{OD} = 2\overline{OA}$ ， $\overline{OE} = 3\overline{OB}$ ， $\overline{OF} = 4\overline{OC}$ ，那么

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}| \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}|\overline{OD}| \cdot \frac{1}{3}|\overline{OE}| \cdot \sin 120^\circ,$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}|\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}|\overline{OE}| \cdot \frac{1}{4}|\overline{OF}| \cdot \sin 120^\circ,$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}|\overline{OA}| \cdot |\overline{OC}| \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}|\overline{OD}| \cdot \frac{1}{4}|\overline{OF}| \cdot \sin 120^\circ,$$

由于  $|\overline{OD}| = |\overline{OE}| = |\overline{OF}|$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = \frac{1}{6} : \frac{1}{12} : \frac{1}{8} = 4:2:3,$$

故答案为：1:1:1； 4:2:3.