昌平区 2015－2016 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数学试卷（理科）

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）**2016．1**

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、　选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

（1）若集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid x^2>1\}$，则 $A\cap B=$（　　）．

A．$\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$　　B．$\{-2,2\}$

C．$\{2\}$　　D．$\{0\}$

（2）下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是（　　）．

A．$y=\sqrt{x}$　　B．$y=\dfrac{1}{x}$　　C．$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　D．$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

（3）已知两点 $O(0,0)$，$A(-2,0)$，以线段 OA 为直径的圆的方程是（　　）．

A．$(x-1)^2+y^2=4$　　B．$(x+1)^2+y^2=4$

C．$(x-1)^2+y^2=1$　　D．$(x+1)^2+y^2=1$

（4）在△ABC 中，$a=3$，$c=2$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，则 $b=$（　　）．

A．19　　B．7　　C．$\sqrt{19}$　　D．$\sqrt{7}$

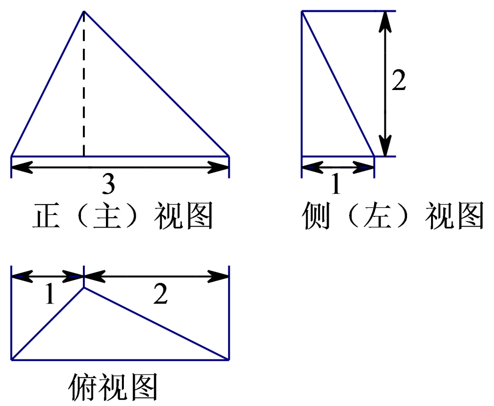
（5）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥四个面的面积中最大的是（　　）．

A．$\sqrt{5}$

B．3

C．$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

D．$3\sqrt{5}$



（6）已知函数 $f(x)$ 的部分对应值如表所示．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，点 (a_n,a_{n+1}) 都在函数 $f(x)$ 的图象上，则 a_{2016} 的值为（　　）.

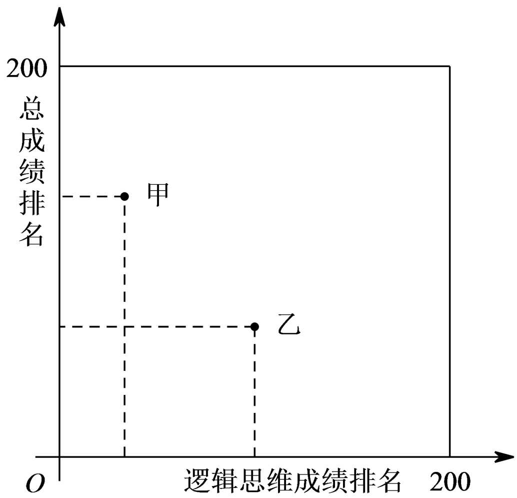
x	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	2	4

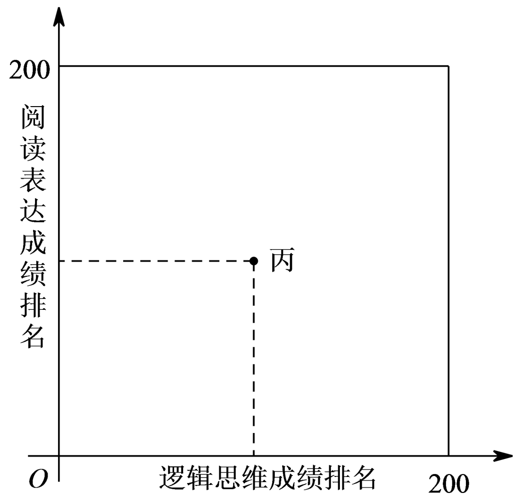
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

（7）若 x，y 满足 $\begin{cases} y\geq 0 \\ x-y+3\geq 0 \\ kx-y+3\geq 0 \end{cases}$，且 $z=2x+y$ 的最大值为 4，则 k 的值为（　　）.

A．$-\frac{3}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

（8）某大学进行自主招生时，需要进行逻辑思维和阅读表达两项能力的测试．学校对参加测试的 200 名学生的逻辑思维成绩、阅读表达成绩以及这两项的总成绩进行了排名．其中甲、乙、丙三位同学的排名情况如下图所示：





下列叙述一定正确的是（　　）.

A．甲同学的阅读表达成绩排名比他的逻辑思维成绩排名更靠前

B．乙同学的逻辑思维成绩排名比他的阅读表达成绩排名更靠前

C．甲、乙、丙三位同学的逻辑思维成绩排名中，甲同学更靠前

D．乙同学的总成绩排名比丙同学的总成绩排名更靠前

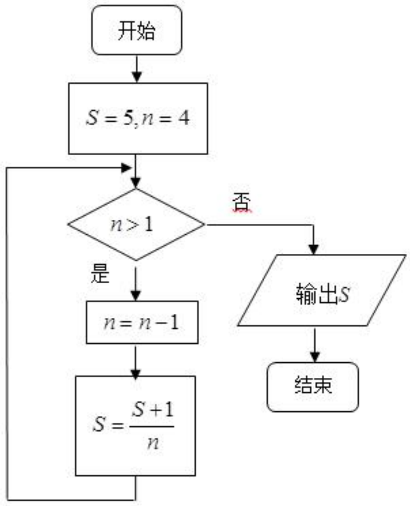
第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）在 $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项是__________（用数字作答）.

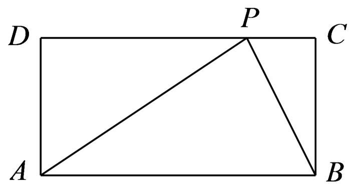
（10）双曲线$C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的渐近线方程为__________；某抛物线的焦点与双曲线C的右焦点重合，则此抛物线的标准方程为__________.

（11）执行如图所示的程序框图，输出的S值为__________.



（12）将序号为1，2，3，4的四张电影票全部分给3人，每人至少一张． 要求分给同一人的两张电影票连号，那么不同的分法种数为__________．(用数字作答）

（13）如图，在矩形$ABCD$中，$\overrightarrow{DP}=3\overrightarrow{PC}$，若$\overrightarrow{PB}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，则$m=$__________；$n=$__________.



（14）已知函数$f(x)=|x^2-3x|$，$x\in\mathbf{R}$．若方程$f(x)-a|x+1|=0$恰有4个互异的实数根，则实数a的取值范围是___________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

（15）（本小题满分 13 分）

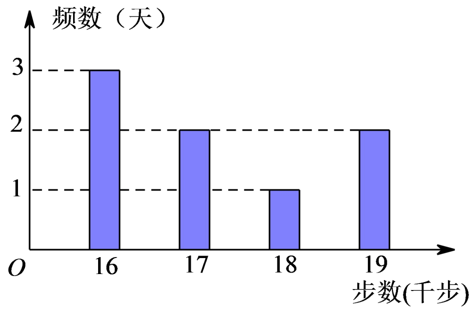
已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\pi-x)\cos x-\cos^2 x$．

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）求函数 $f(x)$ 的单调递减区间．

（16）（本小题满分 13 分）

小王为了锻炼身体，每天坚持“健步走”， 并用计步器进行统计．小王最近8天“健步走”步数的频数分布直方图（图1）及相应的消耗能量数据表（表1）如下：



健步走步数（千步）	16	17	18	19
消耗能量（卡路里）	400	440	480	520

图 1　　　　　　　　　　　　　　表 1

（Ⅰ）求小王这8天 “健步走”步数的平均数；

（Ⅱ）从步数为16千步，17千步，18千步的几天中任选2天，设小王这2天通过健步走消耗的“能量和”为 X ，求 X 的分布列．

(17)（本小题满分 14 分）

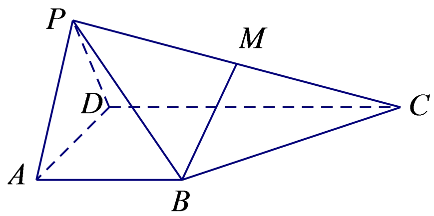
在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle PAD$ 为等边三角形，$AB=AD=\frac{1}{2}CD$，

$AB\perp AD$， $AB// CD$， 点 $g(x)=f\left(x\right)-x^2+2x$ 是 PC 的中点.

（I）求证： $MB//$ 平面 PAD；

（II）求二面角 $P-BC-D$ 的余弦值；

（III）在线段 PB 上是否存在点 N，使得 $DN\perp$ 平面 PBC？若存在，请求出 $\frac{PN}{PB}$ 的值；若不存在，请说明理由.



（18）（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\ln(x+1)$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y=2x$，求切点 P 的坐标；

（Ⅱ）求证：当 $x\in[0,\mathrm{e}-1]$ 时，$f(x)\geq x^2-2x$；（其中 $\mathrm{e}=2.71828$）

（Ⅲ）确定非负实数 a 的取值范围，使得 $\forall x\geq 0$，$f(x)\geq a(2x-x^2)$ 成立.

（19）（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点 $\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 在椭圆 C 上．直线 l 过点 $(1,1)$，且与椭圆 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M．

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）点 O 为坐标原点，延长线段 OM 与椭圆 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求出此时直线 l 的方程，若不能，说明理由．

（20）（本小题满分 14 分）

对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$，记集合$E_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$，$P_n=\left\{x\left|x=\frac{a}{\sqrt{b}},a\in E_n,b\in E_n\right.\right\}$．若集合$A$满足下列条件：

①$A\subseteq P_n$；②$\forall x_1$，$x_2\in A$，且$x_1\neq x_2$，不存在$k\in\mathbf{N}^*$，使$x_1+x_2=k^2$，则称A具有性质Ω.

如当$n=2$时，$E_2=\{1,2\}$，$P_2=\left\{1,2,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{2}}\right\}$．$\forall x_1$，$x_2\in P_2$，且$x_1\neq x_2$，不存在$k\in\mathbf{N}^*$，使$x_1+x_2=k^2$，所以$P_2$具有性质$\Omega$.

（Ⅰ）写出集合P_3，P_5中的元素个数，并判断P_3是否具有性质Ω.

（Ⅱ）证明：不存在A，B具有性质Ω，且$A\cap B=\varnothing$，使$E_{15}=A\cup B$.

（Ⅲ）若存在A，B具有性质Ω，且$A\cap B=\varnothing$，使$P_n=A\cup B$，求n的最大值.

昌平区 2015－2016 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数学试卷参考答案及评分标准　（理科）2016．1

一、　选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	D	C	B	A	C

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）60　　（10）$y=\pm\frac{4}{3}x$；$y^2=20x$　　（11）$\frac{5}{2}$

（12）18　　（13）$\frac{1}{4}$；-1　　（14）$(0,1)\cup(9,+\infty)$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

（15）（本小题满分 13 分）

解：（I）$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$$

$$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$$

所以 最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（II）由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得$\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数$f(x)$的单调递减区间是$\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

（16）（本小题满分 13 分）

解：　（I）小王这8天“健步走”步数的平均数为

$$\frac{16\times3+17\times2+18\times1+19\times2}{8}=17.25\text{（千步）}.$$

（II）X 的各种取值可能为800，840，880，920.

$$P(X=800)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5},\quad P(X=840)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{5},$$

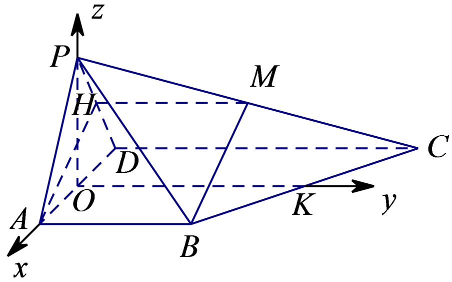
$$P(X=880)=\frac{C_3^1C_1^1+C_2^2}{C_6^2}=\frac{4}{15},\quad P(X=920)=\frac{C_2^1C_1^1}{C_6^2}=\frac{2}{15},$$

X 的分布列为：

X	800	840	880	920
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

（17）（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：取 PD 中点 H，连结 MH，AH．



因为 M 为 PC 中点，

所以 $HM // CD$，$HM=\frac{1}{2}CD$．

因为 $AB // CD$，$AB=\frac{1}{2}CD$．

所以 $AB // HM$ 且 $AB=HM$．

所以四边形 $ABMH$ 为平行四边形，

所以 $BM // AH$．

因为 $BM \not\subset$ 平面 PAD，

$AH \subset$ 平面 PAD，

所以 $BM //$ 平面 PAD．

（Ⅱ）取 AD 中点 O，连结 PO．

因为 $PA=PD$，

所以 $PO \perp AD$．

因为 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$PO \subset$ 平面 PAD，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$．

取 BC 中点 K，连结 OK，则 $OK // AB$．

以 O 为原点，如图建立空间直角坐标系，

设 $AB=2$，

则 $A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,4,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,2,-\sqrt{3})$．

平面 BCD 的法向量 $\overrightarrow{OP}=(0,0,\sqrt{3})$，

设平面 PBC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ x+2y-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\vec{n}=\left(1,1,\sqrt{3}\right)$.

$\cos<\overrightarrow{OP},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

由图可知，二面角 $P-BC-D$ 是锐二面角，

所以二面角 $P-BC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

（III）不存在.

设点 $N\left(x,y,z\right)$，且 $\dfrac{PN}{PB}=\lambda$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PB}$，

所以 $\left(x,y,z-\sqrt{3}\right)=\lambda\left(1,2,-\sqrt{3}\right)$.

则 $\begin{cases}x=\lambda,\\ y=2\lambda,\\ z=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda.\end{cases}$

所以 $N\left(\lambda,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$，$\overrightarrow{DN}=\left(\lambda+1,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$.

若 $DN\perp$ 平面 PBC，则 $\overrightarrow{DN}//\vec{n}$，

即 $\lambda+1=2\lambda=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}}$，此方程无解，

所以在线段 PB 上不存在点 N，使得 $DN\perp$ 平面 PBC.

（18）（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：定义域为 $\left(-1,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\dfrac{2}{x+1}$.

由题意，$f'\left(x_0\right)=2$，所以 $x_0=0$，$f\left(0\right)=0$，即切点 P 的坐标为 $\left(0,0\right)$

（Ⅱ）证明：当 $x\in\left[0,\mathrm{e}-1\right]$ 时，$f\left(x\right)\ge x^2-2x$，可转化为

当 $x\in\left[0,\mathrm{e}-1\right]$ 时，$f\left(x\right)-x^2+2x\ge 0$ 恒成立.

设 $g(x)=f\left(x\right)-x^2+2x$，

所以原问题转化为当 $x\in\left[0,\mathrm{e}-1\right]$ 时，$g\left(x\right)_{\min}\ge 0$ 恒成立.

所以 $g'(x)=\dfrac{2}{x+1}-2x+2=\dfrac{4-2x^2}{x+1}$.

令 $g'(x)=0$ ，则 $x_1=-\sqrt{2}$ （舍）， $x_2=\sqrt{2}$.

所以 $g(x)$ ， $g'(x)$ 变化如下：

x	0	$\left(0,\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2},\mathrm{e}-1\right)$	$\mathrm{e}-1$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$g(0)$	Z	极大值	]	$g(\mathrm{e}-1)$

因为 $g(0)=f(0)-0=0$ ，

$g(\mathrm{e}-1)=2-(\mathrm{e}-1)^2+2(\mathrm{e}-1)=2+(\mathrm{e}-1)(3-\mathrm{e})>0$ ，

所以 $g(x)_{\min}=0$.

当 $x\in[0,\mathrm{e}-1]$ 时， $f(x)\geq x^2-2x$ 成立.

（III）解： $\forall x\geq 0$ ， $f(x)\geq a\left(2x-x^2\right)$ ，可转化为

当 $x\geq 0$ 时， $f(x)-a\left(2x-x^2\right)\geq 0$ 恒成立.

设 $h(x)=f(x)-a\left(2x-x^2\right)$ ，

所以 $h'(x)=\dfrac{2}{x+1}-2a+2ax=\dfrac{2(ax^2+1-a)}{x+1}$.

（1）当 $a=0$ 时，对于任意的 $x\geq 0$ ， $h'(x)=\dfrac{2}{x+1}>0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$ ，

所以命题成立.

当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=0$ ，则 $ax^2+1-a=0$ ，

（2）当 $1-a\geq 0$ ，即 $0<a\leq 1$ 时，对于任意的 $x\geq 0$ ， $h'(x)>0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$ ，

所以命题成立.

（3）当 $1-a<0$ ，即 $a>1$ 时，

则 $x_1=-\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}$ （舍）， $x_2=\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{a}}>0$.

所以 $h(x)$ ， $h'(x)$ 变化如下：

x	0	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		]	极小值	Z

因为 $h(x)_{\min}=h(x_2)<h\left(0\right)=0$ ，

所以，当 $x\geq 0$ 时，命题不成立.

综上，非负实数 a 的取值范围为 $[0,1]$.

（19）（本小题满分 13 分）

解：（I）由题意得 $\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$ 解得 $a^2=4$ ， $b^2=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（II）四边形 $OAPB$ 能为平行四边形.

法一：

（1）当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 l 的方程为 $x=1$ 满足题意；

（2）当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 $l:y=kx+m$ ，显然 $k\neq 0$ ， $m\neq 0$.

$A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ， $M(x_M,y_M)$.

将 $y=kx+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$ ，

$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)>0$ ， $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$.

故 $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{4km}{4k^2+1}$ ，

$y_M=kx_M+m=\dfrac{m}{4k^2+1}$.

于是直线 OM 的斜率 $k_{OM}=\dfrac{y_M}{x_M}=-\dfrac{1}{4k}$ ，即 $k_{OM}\cdot k=-\dfrac{1}{4}$.

由直线 $l:y=kx+m$ $(k\neq 0,m\neq 0)$ ，过点 $(1,1)$ ，

得 $m=1-k$ ，因此 $x_M=\dfrac{4k(k-1)}{4k^2+1}$.

OM 的方程为 $y=-\dfrac{1}{4k}x$. 设点 P 的横坐标为 x_P .

由$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{4k}x, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$得 ${x_P}^2=\dfrac{16k^2}{4k^2+1}$，即 $x_P=\dfrac{\pm 4k}{\sqrt{4k^2+1}}$.

四边形 $OAPB$ 为平行四边形当且仅当线段 AB 与线段 OP 互相平分，即 $x_P=2x_M$.

于是 $\dfrac{\pm 4k}{\sqrt{4k^2+1}}=2\times\dfrac{4k(k-1)}{4k^2+1}$. 由 $k\neq 0$，得 $k=\dfrac{3}{8}$， $m=\dfrac{5}{8}$ 满足 $\Delta>0$

所以直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{8}$ 时，四边形 $OAPB$ 为平行四边形.

综上所述：直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{8}$ 或 $x=1$.

法二：

（1）当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 l 的方程为 $x=1$ 满足题意；

（2）当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 $l: y=kx+m$，

显然 $k\neq 0$， $m\neq 0$， $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， $M(x_M,y_M)$.

将 $y=kx+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)>0$， $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$.

故 $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{4km}{4k^2+1}$，

$y_M=kx_M+m=\dfrac{m}{4k^2+1}$.

四边形 $OAPB$ 为平行四边形当且仅当线段 AB 与线段 OP 互相平分，

即$\begin{cases} x_P=2x_M, \\ y_P=2y_M. \end{cases}$. 则 $\dfrac{\left(-\dfrac{8km}{4k^2+1}\right)^2}{4}+\left(\dfrac{2m}{4k^2+1}\right)^2=1$.

由直线 $l: y=kx+m\ (k\neq 0, m\neq 0)$，过点 $(1,1)$，得 $m=1-k$.

则 $\dfrac{(16k^2+4)(1-k)^2}{(4k^2+1)^2}=1$，

则 $(4k^2+1)(8k-3)=0$.

则 $k=\dfrac{3}{8}$， $m=\dfrac{5}{8}$. 满足 $\Delta>0$.

所以直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{8}$ 时，四边形 $OAPB$ 为平行四边形.

综上所述：直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{8}$ 或 $x=1$.

（20）（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：集合 P_3， P_5 中的元素个数分别为 9， 23， P_3 不具有性质 Ω .

（Ⅱ）证明：假设存在 A， B 具有性质 Ω，且 $A\cap B=\varnothing$，使 $E_{15}=A\cup B$.

其中 $E_{15}=\{1,2,3,\cdots,15\}$.

因为 $1\in E_{15}$，所以 $1\in A\cup B$，不妨设 $1\in A$.

因为 $1+3=2^2$，所以 $3\notin A$， $3\in B$. 同理 $6\in A$， $10\in B$， $15\in A$.

因为 $1+15=4^2$，这与 A 具有性质 Ω 矛盾.

所以假设不成立，即不存在 A， B 具有性质 Ω，且 $A\cap B=\varnothing$，使 $E_{15}=A\cup B$.

（Ⅲ）因为当 $n\geq 15$ 时， $E_{15}\subseteq P_n$，

由（Ⅱ）知，不存在 A， B 具有性质 Ω，且 $A\cap B=\varnothing$，使 $P_n=A\cup B$.

若 $n=14$，当 $b=1$ 时，$\left\{x\left|x=\frac{a}{\sqrt{1}},a\in E_{14}\right.\right\}=E_{14}$，

取 $A_1=\{1,2,4,6,9,11,13\}$， $B_1=\{3,5,7,8,10,12,14\}$，

则 A_1， B_1 具有性质 Ω，且 $A_1\cap B_1=\varnothing$，使 $E_{14}=A_1\cup B_1$.

当 $b=4$ 时，集合 $\left\{x\left|x=\frac{a}{\sqrt{4}},a\in E_{14}\right.\right\}$ 中除整数外，

其余的数组成集合为 $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots,\frac{13}{2}\right\}$ ，令 $A_2=\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right\}$ ， $B_2=\left\{\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right\}$ ，

则 A_2， B_2 具有性质 Ω，且 $A_2\cap B_2=\varnothing$，使 $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots,\frac{13}{2}\right\}=A_2\cup B_2$.

当 $b=9$ 时，集 $\left\{x\left|x=\frac{a}{\sqrt{9}},a\in E_{14}\right.\right\}$ 中除整数外，其余的数组成集合

$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{10}{3},\frac{11}{3},\frac{13}{3},\frac{14}{3}\right\}$，

令 $A_3=\left\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{13}{3}\right\}$， $B_3=\left\{\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right\}$. 则 A_3,B_3 具有性质 Ω，

且 $A_3\cap B_3=\varnothing$，使 $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{10}{3},\frac{11}{3},\frac{13}{3},\frac{14}{3}\right\}=A_3\cup B_3$.

集合 $C=\left\{x\left|x=\frac{a}{\sqrt{b}},a\in E_{14},b\in E_{14},b\neq 1,4,9\right.\right\}$ 中的数均为无理数，

它与 P_{14} 中的任何其他数之和都不是整数，

因此，令 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup C$， $B=B_1\cup B_2\cup B_3$，则 $A\cap B=\varnothing$，且 $P_{14}=A\cup B$．

综上，所求 n 的最大值为 14．

选填解析

一、 选择题

1. 【答案】B

【解析】因为 $B=\{x\mid x^2>1\}=\{x\mid x>1$ 或 $x<-1\}$，

所以，$A\cap B=\{-2,2\}$．

故选 B．

2. 【答案】A

【解析】对于 A，函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，满足题意；

对于 B，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不满足题意；

对于 C，函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不满足题意；

对于 D，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不满足题意．

故选 A．

3. 【答案】D

【解析】由题可知，圆心为线段 OA 的中点 $(-1,0)$，

半径为 $\dfrac{|-2|}{2}=1$，所以圆的方程为 $(x+1)^2+y^2=1$．

故选 D．

4. 【答案】D

【解析】由余弦定理可知，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+4-2\times3\times2\times\dfrac{1}{2}=7$，所以 $b=\sqrt{7}$．

故选 D．

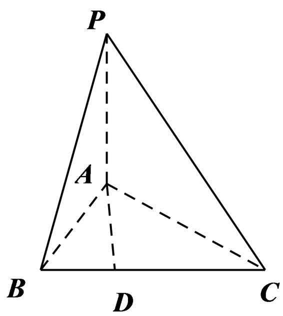
5. 【答案】C

【解析】该三棱锥的直观图如图所示：

由题可知，$PA\perp AB$，$PA\perp AC$，$AD\perp BC$，

其中 $PA=2$，$AD=1$，$BD=1$，$DC=2$，

由勾股定理可得，$AB=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，



$BP=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$， $CP=\sqrt{4+5}=3$，

所以， $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3}{2}$， $S_{\triangle ABP}=\sqrt{2}$， $S_{\triangle ABC}=\sqrt{5}$，

等腰三角形 CPB 的面积 $S_{\triangle CPB}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{9-\dfrac{3}{2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，

综上，最大的是 $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

故选 C.

6. 【答案】B

【解析】由题可知，数列递推公式为 $a_{n+1}=f\left(a_n\right)$，

因为 $a_1=1$，所以 $a_2=f\left(a_1\right)=f\left(1\right)=3$，

$a_3=f\left(a_2\right)=f\left(3\right)=2$， $a_3=f\left(a_4\right)=f\left(2\right)=1$，

所以，数列为 $1,3,2,1,3,2,1,3,2,\cdots$ 的周期为 3，

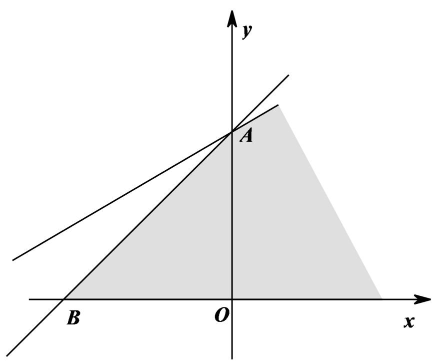
故 $a_{2016}=a_3=2$.

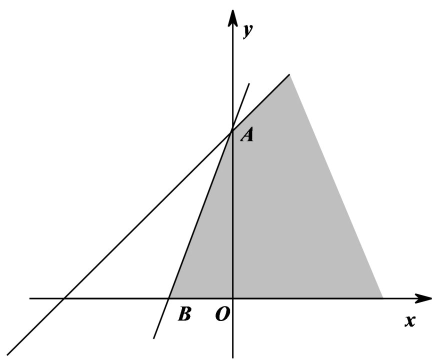
故答案为 B.

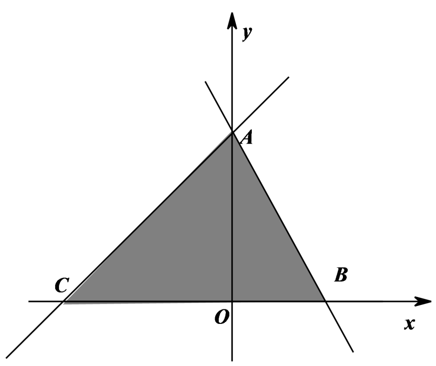
7. 【答案】A

【解析】若 x， y 满足 $\begin{cases} y\geq 0 \\ x-y+3\geq 0 \\ kx-y+3\geq 0 \end{cases}$ 的区域如下所示：

三图分别为 $k\in\left(0,1\right)$， $k\in\left(1,+\infty\right)$， $k\in\left(-\infty,0\right)$；







前两种，显然 $z=2x+y$ 无最大值；

第三种，当 $z=2x+y$ 在 $A(0,3)$ 取得最大值，$z=2x+y=3$，不满足题意；

当 $z=2x+y$ 在 $B\left(-\frac{3}{k},0\right)$ 取得最大值，$z=2x+y=-\frac{6}{k}=4$，

解得，$k=-\frac{3}{2}$.

故答案选 A

8. 【答案】C

【解析】由题可知，甲的逻辑思维成绩靠前，但总成绩比较靠后，

说明甲的阅读表达成绩排名靠后，A 错；

乙的逻辑思维成绩居中，但总成绩比较靠前，

说明乙的阅读表达成绩排名靠前，B 错；

甲的逻辑思维成绩靠前，乙、丙逻辑思维成绩居中，C 对；

乙、丙逻辑思维成绩居中，但两者阅读表达成绩不清楚，

无法判断总成绩排名谁更靠前，D 错.

故答案选 C.

二、 填空题

9. 【答案】60

【解析】由二项式定理可知，$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\left(2x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r$，

当 $r=4$ 时，$T_5=\mathrm{C}_6^4\left(2x^2\right)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4=60$.

故答案为 60 .

10. 【答案】$y=\pm\frac{4}{3}x$；$y^2=20x$

【解析】双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的渐近线方程为

$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}x=\pm\sqrt{\frac{16}{9}}x=\pm\frac{4}{3}x$；

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$，所以右焦点坐标为 $(5,0)$，

$y^2=2px$ 中的 $\frac{p}{2}=5$，即 $p=10$，

所以，抛物线的标准方程为 $y^2=20x$.

故答案为 $y=\pm\frac{4}{3}x$； $y^2=20x$.

11. 【答案】$\frac{5}{2}$

【解析】输入： $n=4$， $S=5$；

第一次循环， $n=3$， $S=2$；

第二次循环， $n=2$， $S=\frac{3}{2}$；

第三次循环， $n=1$， $S=\frac{5}{2}$；

循环结束，输出： $S=\frac{5}{2}$.

故答案为 $\frac{5}{2}$

12. 【答案】18

【解析】由题可知，有两张票连号只有1和2、2和3、3和4三种情况；

所以不同的分法种数为 $3\times \mathrm{A}_3^3=18$ 种.

故答案为18 .

13. 【答案】$\frac{1}{4}$； -1

【解析】由三角形法则可知， $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$；

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ ，

所以， $m=\frac{1}{4}$， $n=-1$.

故答案为 $\frac{1}{4}$； -1

14. 【答案】$(0,1)\cup(9,+\infty)$

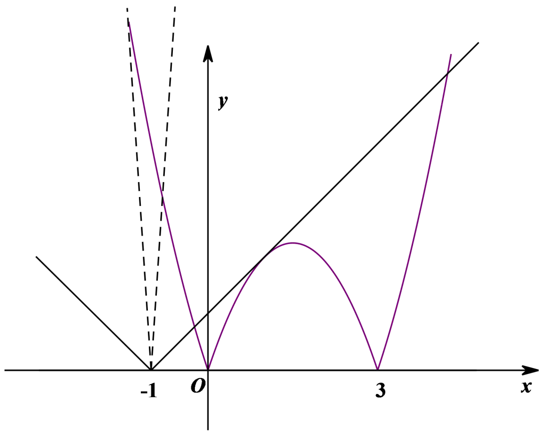
【解析】

$f(x)-a|x+1|=0\Leftrightarrow\left|x^2-3x\right|=a|x+1|$ ，

由题易知 $a>0$ ，

当 $y=a|x+1|$ 的右半段（ $x>-1$ ）与 $f(x)$ 有三个交点，如图所示（实线），

联立$\begin{cases}y=3x-x^2\\y=ax+a\end{cases}$，得$x^2+(a-3)x+a=0$，



$\Delta=(a-3)^2-4a=0$，

解得$a=1$，$a=9$（当$a=9$时，

$x^2+6x+9=0\Rightarrow x=-3<-1$，舍），

所以$a\in(0,1)$，

当$a>1$时，

当$y=a|x+1|$的右半段（$x>-1$）与$f(x)$恒有

两个交点，

左半段（$x<-1$）有一个交点，如图所示（需线），

联立$\begin{cases}y=-3x+x^2\\y=-ax-a\end{cases}$，得$x^2+(a-3)x+a=0$，

$\Delta=(a-3)^2-4a=0$，

解得$a=9$，$a=1$（当$a=1$时，$x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1>-1$，舍）

所以$a\in(0,1)$，综上$a\in(0,1)\cup(9,+\infty)$.

故答案为$(0,1)\cup(9,+\infty)$