# 潞河中学 2015-2016-1 期末高二数学试卷（文科）

## 第 I 卷（选择题 共 40 分）

**一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把答案涂在答题卡上）**

1. 命题“ $p$ 或 $q$ ”为真命题（　　）

A. 命题 $p$ 为真　　B. 命题 $q$ 为真

C. 命题 $p$ 和命题 $q$ 一真一假　　D. 命题 $p$ 和命题 $q$ 至少一个为真

2. 已知 $m\in R$，则“ $m\neq 5$ ”是“曲线 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{5}=1$ 为椭圆”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 $F_1,F_2$，点 $A$ 在椭圆上，$AF_2\perp x$ 轴，若 $\frac{|AF_1|}{|AF_2|}=\frac{5}{3}$，则椭圆的离心率等于（　　）

A. $2$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 设抛物线 $y^2=px$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左焦点重合，则 $p$ 的值为（　　）

A. $-4$　　B. $-8$　　C. $4$　　D. $8$

5. 已知点 $A(4,8)$ 是抛物线 $C:y^2=2px$ 与直线 $l:y=k(x+4)$ 的一个交点，则抛物线的焦点到直线 $l$ 的距离是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

6. 已知点 $P$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上，则点 $P$ 到直线 $l_1:4x-3y+11=0$ 的距离和到 $l_2:x=-1$ 的距离之和的最小值为（　　）

A. $\frac{37}{16}$　　B. $3$　　C. $2$　　D. $\frac{11}{5}$

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m^2}-y^2=1(m>0)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 的准线交于 $A,B$ 两点，$O$ 为坐标原点，若 $\Delta AOB$ 的面积等于 1，则 $m=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 若直线 $l$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 所截得的弦长不小于 $2\sqrt{3}$，则 $l$ 与下列曲线一定有公共点的是（　　）

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $(x-1)^2+y^2=1$　　C. $y=x^2$　　D. $x^2-y^2=1$

## 第II卷（非选择题 共110分）

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，满分共30分。把答案填写在答题纸上。）

9. 命题：$\forall x\in R, x^2+2x+2>0$ 的否定____________________________。

10. 已知双曲线过点 $(4,\sqrt{3})$，且渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，则该双曲线的标准方程为____________________________。

11. 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上，纵坐标为2的点到抛物线焦点的距离为5，则 $p=$______。

12. 抛物线顶点在原点，其准线方程过双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点，则此抛物线方程为____________________________。

13. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，$P$ 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 右支上一个动点。若点 $P$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离大于 $t$ 恒成立，则实数 $t$ 的最大值为________________。

14. 已知直线 $l: y=-2$，定点 $F(0,2)$，$P$ 是直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 上的动点，若经过点 $F,P$ 的圆与 $l$ 相切，则这个圆面积的最小值为________________。

**三、解答题本大题共6小题，共80分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。**

15.（本小题满分10分）

已知一定点 $A(4,-3), B$ 为圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上的动点，求线段 $AB$ 中点 $M$ 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形。

16.（本小题满分 14 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的实轴长为 2，点 $P(2,\sqrt{6})$ 在此双曲线上。

（Ⅰ）求双曲线 $C$ 的方程；

（Ⅱ）已知直线 $x-y+m=0$ 与双曲线 $C$ 交于不同的两点 $A,B$，且线段 $AB$ 中点 $N$ 在圆 $x^2+y^2=5$ 上，求实数 $m$ 的值。

17.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $M$ 到点 $F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$ 的距离之和为 4，点 $M$ 的轨迹是 $C$。直线 $l:y=kx+\sqrt{2}$ 与轨迹 $C$ 交于不同的两点 $P,Q$。

（Ⅰ）求轨迹 $C$ 的方程；

（Ⅱ）是否存在常数 $k$，使 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$？若存在，求出 $k$ 的值；若不存在，说明理由。

18.（本小题满分 14 分）

已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F$，过点 $F$ 的直线交抛物线于 $A,B$ 两点。

（Ⅰ）若 $\overrightarrow{AF}=-4\overrightarrow{BF}$，求直线 $AB$ 的方程；

（Ⅱ）设点 $M$ 在线段 $AB$ 上运动，原点 $O$ 关于点 $M$ 的对称点为 $C$，求四边形 $OACB$ 面积的最小值。





19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点 $F_1(-\sqrt{2},0),F_2(\sqrt{2},0)$，点 $P(1,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$ 在此椭圆上。

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的方程；

（Ⅱ）过点 $M(1,0)$ 的直线 $l$ 与椭圆 $C$ 相交于 $A,B$ 两点，设点 $N(3,2)$，记直线 $AN,BN$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$，求证：$k_1+k_2$ 为定值。

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，点$(1,0)$与椭圆短轴的两个端点的连线互相垂直。

（Ⅰ）求椭圆$C$的标准方程；

（Ⅱ）设椭圆$C$与直线$y=kx+m$相交于不同的两点$M,N$，点$D(0,-1)$，当$|DM|=|DN|$时，求实数$m$的取值范围。

# 参考答案

## 一、选择

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | B | C | B | D | B | C | A |

## 二、填空

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | $\exists x\in R, x^2+2x+2\le 0$ | $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ | 6 | $y^2=-8x$ | $\sqrt{2}$ | $4\pi$ |

## 三、解答

15.解：设 $M(x,y),B(m,n)$

$\because M$ 是 $AB$ 的中点

$$\therefore\begin{cases}x=\dfrac{m+4}{2}\\ y=\dfrac{n-3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2x-4\\ n=2y+3\end{cases}$$

$\because B$ 在 $(x+1)^2+y^2=4$ 上，即 $(2x-4+1)^2+(2y+3)^2=4$

化简为 $(x-\dfrac{3}{2})^2+(y+\dfrac{3}{2})^2=1$

$\therefore M$ 点的轨迹方程为 $(x-\dfrac{3}{2})^2+(y+\dfrac{3}{2})^2=1$，该方程表示的是圆心为 $(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2})$，半径为 1 的圆。

16.解：（Ⅰ）依题意知：$2a=2$ $\quad\therefore a=1$

又点 $P(2,\sqrt{6})$ 在双曲线上，$\therefore\dfrac{4}{1^2}-\dfrac{6}{b^2}=1\Rightarrow b^2=2$

$\therefore$ 双曲线方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),N(x_0,y_0)$

由 $\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=x+m\end{cases}$ 消 $y$ 有 $x^2-2mx-m^2-2=0$

$\therefore\Delta=(-2m)^2+4(m^2+2)>0$

$\therefore x_1+x_2=2m \qquad x_1x_2=-(m^2+2)$

$\because N$ 为 $AB$ 中点　$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=m$　　$y_0=x_0+m=2m$

$\because N$ 在圆 $x^2+y^2=5$ 上　即 $m^2+(2m)^2=5$

$\therefore m=\pm1$，经检验，符合题意。

所以，实数 $m$ 的值为 $\pm1$。

17. 解：（Ⅰ）依题意知：$|MF_1|+|MF_2|=4>|F_1F_2|=2\sqrt{3}$

$\therefore M$ 点的轨迹 $C$ 是以 $F_1,F_2$ 为焦点，且 $2a=4$ 的椭圆

由 $a=2,c=\sqrt{3},b^2=a^2-c^2=1$ 知

轨迹 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（Ⅱ）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+\sqrt{2}\end{cases}$ 消 $y$ 知　　$(4k^2+1)x^2+8\sqrt{2}kx+4=0$

$\because$ 直线 $l:y=kx+\sqrt{2}$ 恒过定点 $(0,\sqrt{2})$ 在椭圆内部

$\therefore \Delta>0$ 恒成立

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8\sqrt{2}k}{4k^2+1}$　　$x_1x_2=\dfrac{4}{4k^2+1}$

而 $y_1y_2=(kx_1+\sqrt{2})(kx_2+\sqrt{2})=k^2x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)+2$

$\because \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$　　$\overrightarrow{OP}=(x_1,y_1),\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2)$

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=(k^2+1)x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)+2$

$$=(k^2+1)\cdot\frac{4}{4k^2+1}+\sqrt{2}k\cdot\frac{-8\sqrt{2}k}{4k^2+1}+2=0$$

$\therefore k^2=\dfrac{3}{2}$　　　$\therefore k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

即存在常数 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，使得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$。

18. 解：（Ⅰ）$\because \overrightarrow{AF}=-4\overrightarrow{BF}$　$\therefore$ 直线 $AB$ 的斜率一定存在，设为 $k$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

$\because$ 直线 $AB$ 过点 $F(1,0)$ $\quad\therefore AB$ 方程为 $y=k(x-1)$

由 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=k(x-1) \end{cases}$ 消 $y$ 知：$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2} \qquad x_1x_2=1$

$\because \overrightarrow{AF}=-4\overrightarrow{BF}$ 即 $(1-x_1,-y_1)=-4(1-x_2,-y_2)\Rightarrow x_1=5-4x_2$

$\therefore x_1x_2=(5-4x_2)x_2=1 \qquad \therefore x_2=\dfrac{1}{4}$ 或 $x_2=1$（舍）

$\therefore x_1=4 \qquad \therefore x_1+x_2=4+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2k^2+4}{k^2} \qquad \therefore k=\pm\dfrac{4}{3}$

$\therefore$ 直线 $AB$ 的方程为 $y=\pm\dfrac{4}{3}(x-1)$ 即 $4x-3y-4=0$ 或 $4x+3y-4=0$

（II）$\because$ 点 $C$ 与点 $O$ 关于点 $M$ 对称 $\qquad\therefore M$ 为 $OC$ 中点

$\therefore$ 点 $C$ 与点 $O$ 到直线 $AB$ 的距离相等

$\therefore S_{四边形OACB}=2S_{\Delta AOB}=2\times\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

设直线 $AB$ 方程为：$x=my+1$

由 $\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+1 \end{cases}$ 消 $x$ 知：$y^2-4my-4=0$

$\therefore y_1+y_2=4m \qquad y_1y_2=-4$

$\therefore S_{四边形OACB}=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{m^2+1}\geq 4$

即当 $m=0$ 时，四边形 $OACB$ 的面积最小为 4.

19. 解：（I）依题意知：

$$\begin{cases} c=\sqrt{2} \\ a^2=b^2+c^2 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{(\frac{\sqrt{6}}{3})^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=3 \\ b^2=1 \end{cases}$$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$

（II）$\because$ 直线 $AB$ 过点 $M(1,0)$

$\therefore$ 设直线 $AB$ 的方程为 $x=my+1 \qquad A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1\\ x=my+1\end{cases}$ 消 $x$ 知： $(m^2+3)y^2+2my-2=0$

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}\qquad y_1y_2=-\dfrac{2}{m^2+3}$

$\because N(3,2)\qquad \therefore k_1=\dfrac{y_1-2}{x_1-3}\qquad k_2=\dfrac{y_2-2}{x_2-3}$

$\therefore k_1+k_2=\dfrac{y_1-2}{x_1-3}+\dfrac{y_2-2}{x_2-3}=\dfrac{(y_1-2)\cdot(x_2-3)+(y_2-2)\cdot(x_1-3)}{(x_1-3)\cdot(x_2-3)}$

$=\dfrac{(y_1-2)\cdot(my_2+1-3)+(y_2-2)\cdot(my_1+1-3)}{(my_2+1-3)\cdot(my_1+1-3)}=\dfrac{2my_1y_2-2(m+1)(y_1+y_2)+8}{m^2-2m(y_1+y_2)+4}$

$=\dfrac{\dfrac{-4m}{m^2+3}+2(m+1)\dfrac{2m}{m^2+3}+8}{\dfrac{2m^2}{m^2+3}+\dfrac{4m^2}{m^2+3}+4}=\dfrac{12m^2+24}{6m^2+12}=2$ 为定值。

20. 解：（Ⅰ）依题意知：

$$\begin{cases}e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\\ a^2=b^2+c^2\\ \dfrac{b-0}{0-1}\cdot\dfrac{-b-0}{0-1}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=3\\ b^2=1\\ c^2=2\end{cases}$$

所以，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$

（Ⅱ）设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$ 消 $y$ 知： $(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$

$\therefore \Delta=(6mk)^2-12(3k^2+1)(m^2-1)=12(3k^2-m^2+1)>0$

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{6km}{3k^2+1}\qquad x_1x_2=\dfrac{3(m^2-1)}{3k^2+1}$

设 $MN$ 中点 $E(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{3km}{3k^2+1}\qquad y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{m}{3k^2+1}$

$\because D(0,-1)$，且$|DM|=|DN|\quad \therefore DE\perp MN\qquad \therefore k_{DE}\cdot k=-1$

$$\because k_{DE}=\frac{\frac{m}{3k^2+1}+1}{-\frac{3km}{3k^2+1}-0}=\frac{m+3k^2+1}{-3km}=-\frac{1}{k}$$

$\therefore 3k^2+1=2m$

由 $\Delta=12(3k^2-m^2+1)>0$ 知 $m^2-2m<0 \quad \therefore 0<m<2$

综上：符合条件的实数 $m$ 的取值范围是 $(0,2)$