

北京市朝阳区 2015-2016 学年高二上学期期末
数学文科试卷

2016.1

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

(1) 设 $a, b \in \mathbf{R}$ 则 “ $a > b > 0$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ” 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

(2) 下列选项中，满足焦点在 y 轴上且离心率为 $\sqrt{3}$ 的双曲线的标准方程为 ().

- A. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$
C. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$

(3) 若函数 $f(x) = x^3 - ax$ 在 $x = 2$ 处取得极小值，则 $a =$ ().

- A. 6 B. 12 C. 2 D. -2

(4) 圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 的圆心到直线 $x - y = 0$ 的距离为 ().

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(5) 已知圆 $O_1: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 41 = 0$ ，圆 $O_2: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ，则两圆的位置关系为 ().

- A. 外离 B. 外切 C. 相交 D. 内切

(6) 已知顶点为原点，对称轴为坐标轴的抛物线的焦点在直线 $x - 2y - 2 = 0$ 上，则此抛物线的标准方程是 ().

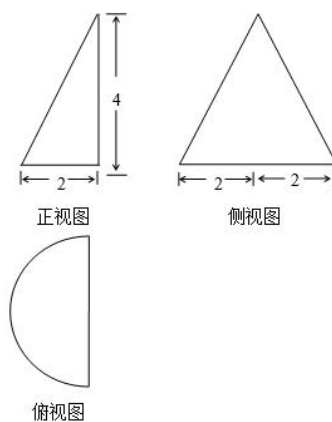
- A. $y^2 = 8x$ B. $x^2 = 4y$ C. $y^2 = 8x$ 或 $x^2 = -4y$ D. $y^2 = 8x$ 或 $x^2 = 4y$

(7) 设 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点， P 为直线 $x = -\frac{4}{3}a$ 上一点， $\triangle F_1PF_2$ 是底角为 30° 的等腰三角形，则此椭圆 C 的离心率为 ().

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{8}{9}$

(8) 某几何体的三视图如图所示，则其体积为 ().

- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{8}{3}\pi$ C. $\frac{16}{3}\pi$ D. $\frac{32}{3}\pi$

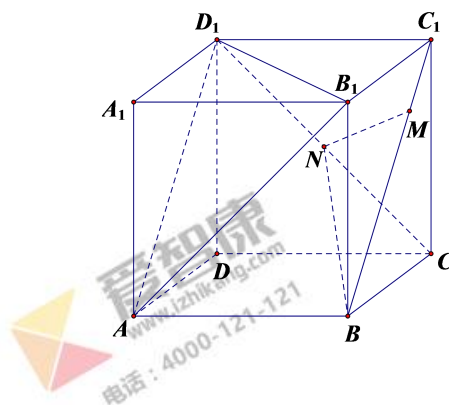


(9) 若 $f(x) = x - e \ln x$ ， $0 < a < e < b$ ，则下列说法一定正确的是 ().

- A. $f(a) < f(b)$ B. $f(a) > f(b)$ C. $f(a) > f(e)$ D. $f(e) > f(b)$

(10) 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, N 为 CD_1 中点, M 为线段 BC_1 上的动点 (M 不与 B, C_1 重合), 以下四个命题:

- ① $CD_1 \perp$ 平面 BMN ;
- ② $MN \parallel$ 平面 AB_1D_1 ;
- ③ $\triangle D_1MN$ 的面积与 $\triangle CMN$ 的面积相等;
- ④ 三棱锥 $D-MNC$ 的体积有最大值.



其中真命题的个数为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

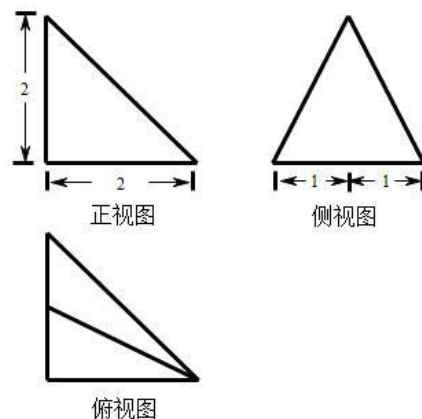
二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请把正确答案填在答题卡上)

(11) 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$ ” 的否定是_____.

(12) 从点 $(2, 0)$ 引圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线, 则切线长为_____.

(13) 将原油精炼为汽油、柴油、塑胶等各种不同产品, 需要对原油进行冷却和加热. 如果第 x h 时, 原油的温度 (单位 $^{\circ}\text{C}$) 为 $y = f(x) = x^2 - 7x + 15$ ($0 \leq x \leq 8$), 则第 4 h 时原油温度的瞬时变化率是 _____ $^{\circ}\text{C}/\text{h}$; 在第 4 h 时附近, 原油的温度在_____. (此空填上升或下降)

(14) 一个三棱锥的三视图如图所示, 则其体积是_____; 此三棱锥的最长棱的长度为_____.



(15) 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同平面, 则以下命题不成立的是_____.

- ① 若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$;
- ② 若 $m \parallel \beta, \beta \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$;
- ③ 若 $m \perp \alpha, m \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$;
- ④ 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, m \parallel n$, 则 $\alpha \parallel \beta$.

(16) 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$ 与直线 $y = x + b$ 相交于 M, N 两点, 且满足 $CM \perp CN$ (C 为圆心), 则实数 b 的值为_____.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 40 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.请写在答题卡上）

17. （本题满分 12 分）

已知函数 $f(x) = x \ln x$.

（I）求这个函数的图象在点 $x=1$ 处的切线方程；

（II）讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(0, t]$ ($t > 0$) 上的单调性.



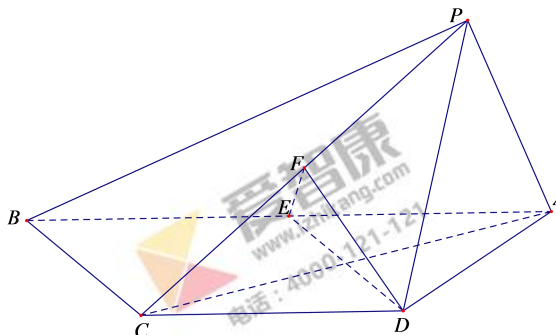
18. (本题满分 14 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP \perp$ 平面 PBC , $AB \parallel DC$, $AP = AD = DC = \frac{1}{2}AB = 1$, $\angle ADC = 120^\circ$, E , F 分别为线段 AB , PC 的中点.

(I) 求证: $AP \parallel$ 平面 EFD ;

(II) 求证: 平面 $EFD \perp$ 平面 APC ;

(III) 求锥体 $P-ADC$ 的体积.



19. (本题满分 14 分)

椭圆 W 的中心在坐标原点 O ，以坐标轴为对称轴，且过点 $(0, \sqrt{3})$ ，其右焦点为 $F(1, 0)$ ．过原点 O 作直线

l_1 交椭圆 W 于 A, B 两点，过 F 作直线 l_2 交椭圆 W 于 C, D 两点，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ．

(I) 求椭圆 W 的标准方程；

(II) 求证： $|AB|^2 = 4|CD|^2$ ．

北京市朝阳区 2015-2016 学年度第一学期期末高二年级统一考试
数学文科答案

2016.1

一、选择题（满分 50 分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 答案 | A | B | B | D | D | C | A | B | C | B |

二、填空题（满分 30 分）

| 题号 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|----|---|------------|-------|------------------|-----|--------|
| 答案 | $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + 2 \leq 0$ | $\sqrt{3}$ | 1, 上升 | $\frac{4}{3}, 3$ | ①②④ | 0 或 -4 |

三、解答题（满分 40 分）

17.（本题满分 12 分）

【解析】

（I） $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 1 + \ln x.$$

这个函数的图象在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $k = f'(1) = 1$.

把 $x=1$ 代入 $f(x) = x \ln x$ 中得 $f(1) = 0$, 即切点坐标为 $(1, 0)$.

则这个函数的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

（II）令 $f'(x) = 1 + \ln x = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$.

（1）当 $0 < t \leq \frac{1}{e}$ 时, 在区间 $(0, t]$ 上, $f'(x) \leq 0$ 成立, 所以函数 $f(x)$ 为减函数.

（2）当 $t > \frac{1}{e}$ 时, 在区间 $(0, \frac{1}{e})$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数;

在区间 $(\frac{1}{e}, t)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

18.（本题满分 14 分）

【解析】（I）设 $AC \cap DE = O$, 连接 OF , EC ,

由于 E 为线段 AB 的中点, $AD = DC = \frac{1}{2}AB$ 且 $AB \parallel DC$,

所以 $AE \parallel DC$, $AE = DC$.

所以四边形 $ADCE$ 为菱形, 故 O 为 AC 中点,

又 F 为 PC 中点,

因此, 在 $\triangle APC$ 中, $AP \parallel OF$

又 $OF \subset$ 平面 EFD , $AP \not\subset$ 平面 EFD ,

所以 $AP \parallel$ 平面 EFD .

（II）由题意, $BE \parallel CD$, $BE = CD$, 所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形,
所以 $BC \parallel ED$.

而 $AP \perp$ 平面 PBC , 所以 $AP \perp BC$, 故 $AP \perp ED$.

因为四边形 $ADCE$ 为菱形，所以 $AC \perp ED$ ，

又 $AP \cap AC = A$ ， AP ， $AC \subset$ 平面 PAC ，

所以 $ED \perp$ 平面 PAC ，又 $ED \subset$ 平面 EFD ，

所以平面 $EFD \perp$ 平面 APC 。

(III) 在 $\triangle ADC$ 中， $AD = CD = 1$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ，所以 $AC = \sqrt{3}$ 。

因为 $AP \perp$ 平面 PBC ，所以 $AP \perp PC$ ，又 $AP = 1$ ，所以 $PC = \sqrt{AC^2 - AP^2} = \sqrt{2}$ 。

所以 $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \times AP \times PC = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

又 $ED \perp$ 平面 PAC ，所以 D 点到平面 APC 的距离为 $DO = \frac{1}{2}$ 。

$$V_{P-ADC} = V_{D-APC} = \frac{1}{3} \times DO \times S_{\triangle APC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$$

19. (本题满分 14 分)

【解析】

(I) 因为已知焦点在 x 轴上，设椭圆 W 的标准方程为： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， $a > b > 0$ ，

由题意： $b = \sqrt{3}$ ， $c = 1$ ，则 $a^2 = 4$ 。

所求椭圆 W 的标准方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(II) 当直线 l_1 垂直于 x 轴时，则直线 l_2 也垂直于 x 轴，把 $x = 1$ 代入椭圆 W 的方程，得

$$y = \pm \frac{3}{2}，即此时 |CD| = 3，而 |AB| = 2\sqrt{3}，所以 |AB|^2 = 4|CD|。$$

当直线 l_1 不垂直于 x 轴时，设直线 l_1 的斜率为 k ，则依题意 l_2 的斜率也为 k ，其方程为

$$y = k(x - 1)。$$

设点 $A(x_0, y_0)$ ， $B(-x_0, -y_0)$ ， $C(x_1, y_1)$ ， $D(x_2, y_2)$ 。

$$则 |AB|^2 = 4(x_0^2 + y_0^2)。$$

把 $y = k(x - 1)$ 代入椭圆方程中，整理得， $(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ 。

$$显然 \Delta > 0，x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}，x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3}。$$

$$则 |CD| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}。$$

$$\text{即 } |CD| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{144(k^2+1)}{(4k^2+3)^2}} = \frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}.$$

由 $|AB|^2 = 4(x_0^2 + y_0^2)$ ，且 $A(x_0, y_0)$ 在椭圆上，

$$\text{得 } |AB|^2 = 4 \left[x_0^2 + 3 \left(1 - \frac{x_0^2}{4} \right) \right] = 4 \left(\frac{x_0^2}{4} + 3 \right).$$

$$\text{则 } |AB|^2 (4k^2 + 3) = 4k^2 x_0^2 + 3x_0^2 + 48k^2 + 36.$$

因为直线 l_1 过原点，所以 $y_0 = kx_0$ ，则 $|AB|^2 (4k^2 + 3) = 4y_0^2 + 3x_0^2 + 48k^2 + 36.$

因为 $A(x_0, y_0)$ 在椭圆上，所以 $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$ ，所以 $|AB|^2 (4k^2 + 3) = 48(k^2 + 1).$

所以 $|AB|^2 (4k^2 + 3) = 4 \times 12(k^2 + 1)$ ，即 $|AB|^2 = 4|CD|.$

选填解析

一、选择题

1. 【答案】A

【解答】当 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 时，得到 $a > b > 0$ 或 $b < a < 0$ ，所以是充分不必要条件。

故选 A.

2. 【答案】B

【解答】离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ，由 $c^2 = a^2 + b^2$ ，解得 $c = \sqrt{3}a$ ， $b = \sqrt{2}a$ ，又有焦点在 y 轴上，所以 B

符合题意。

故选 B.

3. 【答案】B

【解答】 $f'(x) = 3x^2 - a$ ，在 $x = 2$ 处取得极小值，所以 $f'(2) = 12 - a = 0$ ，解得 $a = 12$ 。

故选 B.

4. 【答案】D

【解答】圆方程化为标准方程 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ ，所以圆心 $(1, -2)$ ，到直线的距离 $d = \frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

故选 D.

5. 【答案】D

【解答】将圆 O_1 化简为标准方程 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 49$ ，所以圆心为 $O_1(2, -2)$ ，半径 $r_1 = 7$ ，

圆 O_2 的圆心 $O_2(-1, 2)$ ，半径 $r_2 = 2$ ，圆心距 $O_1O_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = 5$ ，所以 $O_1O_2 = r_1 - r_2$ ，故为内切。

故选 D.

6. 【答案】C

【解答】当 $x = 0$ 时，代入直线方程得 $y = -1$ ，当焦点为 $(0, -1)$ 时，抛物线方程为 $x^2 = -4y$ ，

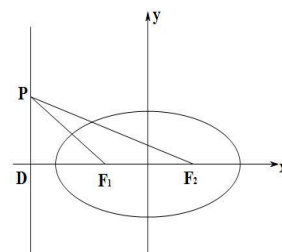
当 $y = 0$ 时，代入直线方程得 $x = 2$ ，当焦点为 $(2, 0)$ 时，抛物线方程为 $y^2 = 8x$ 。

故选 C.

7. 【答案】A

【解答】因为 $\triangle F_1PF_2$ 是底角为 30° 的等腰三角形，则有 $|F_1F_2| = |F_1P|$ ，

因为 $\angle PF_2F_1 = 30^\circ$ ，所以 $\angle PF_1D = 60^\circ$ ， $\angle DPF_1 = 30^\circ$ ，所以 $|F_2D| = \frac{1}{2}|PF_1| = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ ，



即 $\frac{4a}{3} - c = \frac{1}{2} \times 2c = c$ ，所以 $\frac{4a}{3} = 2c$ ，即 $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ ，所以椭圆的离心率为 $e = \frac{2}{3}$ 。

故选 A。

8. 【答案】B

【解答】由图可知该几何体为圆锥的一半，所以 $V = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 \right) = \frac{8}{3} \pi$ 。

故选 B。

9. 【答案】C

【解答】 $f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减，在 $(e, +\infty)$ 上单调递增，由 $0 < a < e < b$ ，可知 $f(a) > f(e)$ ， $f(b) > f(e)$ 。

故选 C。

10. 【答案】B

【解答】① CD_1 与 BM 不垂直，所以 $CD_1 \perp$ 平面 BMN ，不正确；

② 平面 $BMN \parallel$ 平面 AB_1D_1 ，所以 $MN \parallel$ 平面 AB_1D_1 ，正确；

③ 两个三角形等底等高， $\triangle D_1MN$ 的面积与 $\triangle CMN$ 的面积相等，正确；

④ M 与 B 重合，三棱锥 $D-MNC$ 的体积最大，不正确。

故选 B。

二、填空题

11. 【答案】 $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + 2 \leq 0$

【解答】由命题的否定的定义，可知命题 p 的否定是： $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + 2 \leq 0$ 。

故答案为 $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + 2 \leq 0$ 。

12. 【答案】 $\sqrt{3}$

【解答】点 $(2, 0)$ 到圆心的距离为 $d = 2$ ，圆半径 $r = 1$ ，切线长为 $\sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{3}$ 。

故答案为 $\sqrt{3}$ 。

13. 【答案】1，上升

【解答】由题意可知 $f'(x) = 2x - 7$ ，所以当 $x = 1$ 时， $f'(1) = 1$ ，由于导数值大于 0，所以原函数单调递增，所以上升。

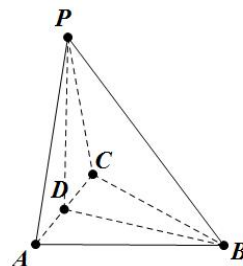
故答案为 1，上升。

14. 【答案】 $\frac{4}{3}$, 3

【解答】将三视图还原成几何体如图，所以 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$ ，

由图形可知，三棱锥各棱长为 $AC = BA = 2$ ， $PA = PC = \sqrt{5}$ ， $BC = 2\sqrt{2}$ ， $PB = 3$ 。

故答案为 $\frac{4}{3}$, 3。



15. 【答案】①②④

【解答】对于①， m 和 n 还可能为异面直线；

对于②， m 可能在 α 面内；

对于④， $\alpha \perp \beta$ 也可以满足。

故答案为①②④。

16. 【答案】0 或 -4

【解答】圆方程化为标准方程 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ，圆心 C 为 $(2,0)$ ，半径 $r = 2$ ，由直线 $y = x+b$ 相交于

M ， N 两点，且满足 $CM \perp CN$ 可知， $\triangle CMN$ 为等腰直角三角形，故点 C 到直线的距离 $d = \sqrt{2}$ ，

由点到直线的距离公式得 $d = \frac{|2+b|}{\sqrt{2}}$ ，解得 $b = 0$ 或 $b = -4$ 。

故答案为 0 或 -4。