

# 昌平区 2015—2016 学年第一学期高二年级文科期末考试数学

2016. 1

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。)

- (1) 如果一个命题的逆命题是真命题，那么以下结论正确的是 ( )。
  - A. 该命题的否命题必是真命题
  - B. 该命题的否命题必是假命题
  - C. 该命题的原命题必是假命题
  - D. 该命题的逆否命题必是真命题
- (2) 经过点  $A(2,3)$  和点  $B(4,7)$  的直线方程是 ( )。
  - A.  $2x + y - 7 = 0$
  - B.  $2x - y + 1 = 0$
  - C.  $2x - y - 1 = 0$
  - D.  $x - 2y + 4 = 0$
- (3) 设点  $P(x,y)$ ，则“ $x = -3$ 且 $y = 1$ ”是“点  $P$  在直线  $l: x - y + 4 = 0$  上”的 ( )。
  - A. 充分而不必要条件
  - B. 必要而不充分条件
  - C. 充分必要条件
  - D. 既不充分也不必要条件
- (4) 若函数  $f(x) = \sin x + \cos x$ ，则  $f'(\frac{\pi}{2})$  的值为 ( )。
  - A. 2
  - B. 1
  - C. 0
  - D. -1
- (5) 已知直线  $a, b, c$  和平面  $\alpha$ ，给出下列两个命题：
 

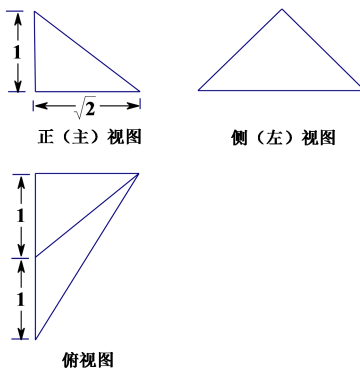
命题  $p$ ：若  $a // \alpha, b // \alpha$ ，则  $a // b$ ；

命题  $q$ ：若  $a // b, b // c$ ，则  $a // c$ 。

那么下列判断正确的是 ( )。

  - A.  $p$  为真命题
  - B.  $q$  为假命题
  - C.  $(\neg p) \wedge q$  为真命题
  - D.  $(\neg p) \vee q$  为假命题
- (6) 过抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点且倾斜角为  $45^\circ$  直线  $l$ ，交抛物线于  $A, B$  两点，则弦  $AB$  的长为 ( )。
  - A. 8
  - B. 16
  - C. 24
  - D. 32
- (7) 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的表面积是 ( )。

- A.  $2 + 2\sqrt{2}$
- B.  $2 + \sqrt{2}$
- C.  $4 + 2\sqrt{2}$
- D.  $4 + \sqrt{2}$



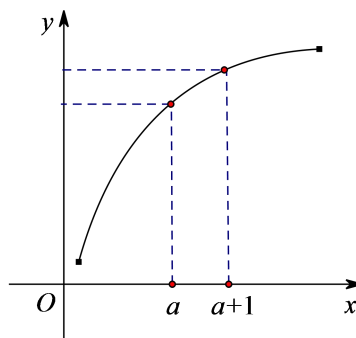
- (8) 从点  $P(-2,1)$  向圆  $x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 = 0$  作切线，当切线长最短时， $m$  的值为 ( )。
  - A. -1
  - B. 0
  - C. 1
  - D. 2

(9) 已知点  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的焦点, 点  $M$  在椭圆  $C$  上且满足  $|\overrightarrow{MF_1} + \overrightarrow{MF_2}| = 2\sqrt{3}$ , 则  $\triangle MF_1F_2$  的面积为 ( ).

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C. 1      D. 2

(10) 函数  $f(x)$  的图象如图所示, 则下列结论正确的是 ( ).

- A.  $0 < f'(a) < f'(a+1) < f(a+1) - f(a)$   
 B.  $0 < f'(a+1) < f(a+1) - f(a) < f'(a)$   
 C.  $0 < f'(a+1) < f'(a) < f(a+1) - f(a)$   
 D.  $0 < f(a+1) - f(a) < f'(a) < f'(a+1)$



二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.)

- (11) 若命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$ , 则  $\neg p$ : \_\_\_\_\_.
- (12) 若直线  $(1+a)x + y + 1 = 0$  与直线  $2x + ay + 2 = 0$  平行, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
- (13) 已知一个圆柱的底面半径为 2, 体积为  $16\pi$ , 则该圆柱的母线长为\_\_\_\_\_, 表面积为\_\_\_\_\_.
- (14) 已知抛物线  $y^2 = 8x$ ,  $P$  是抛物线上一点, 过点  $P$  向其准线作垂线, 垂足为点  $E$ , 定点  $A(2, 5)$ , 则  $|PA| + |PE|$  的最小值为\_\_\_\_\_; 此时点  $P$  的坐标为\_\_\_\_\_.
- (15) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线与圆  $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$  有交点, 则该双曲线的离心率的取值范围为\_\_\_\_\_.

(16) 已知函数  $f(x) = x \ln x + (x-1)^2$ , 且  $x_0$  是函数  $f(x)$  的极值点.

给出以下几个结论:

- ①  $0 < x_0 < \frac{1}{e}$ ; ②  $\frac{1}{e} < x_0 < 1$ ; ③  $f(x_0) + x_0 < 0$ ; ④  $f(x_0) + x_0 > 0$

其中结论正确的是\_\_\_\_\_. (写出所有正确结论的序号)

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

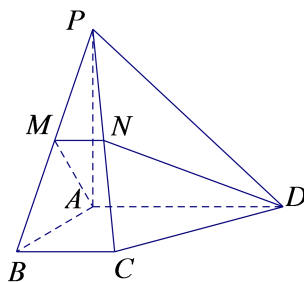
(17) (本小题满分 14 分)

设函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 1$  的导函数为  $f'(x)$ , 且  $f'(-1) = 3$ .

- (I) 求函数  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;  
 (II) 求函数  $f(x)$  的单调区间.

(II) 若直线  $l: ax - y + 4 = 0$  与圆  $C$  相交于  $A, B$  两点, 且弦  $AB$  的长为  $2\sqrt{3}$ , 求  $a$  的值.

②求四棱锥  $P-ADNM$  的体积.



(III) 对任意  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ , 若  $g(x_1) < f'(x_2)$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

## 昌平区 2015—2016 学年第一学期高二年级文科期末考试数学试卷参考答案

2016. 1

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	A	D	C	B	A	C	C	B

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

(11)  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$       (12) -2 或 1      (13) 4 ;  $24\pi$

(14) 5; (2, 4)      (15)  $(1, \sqrt{2}]$       (16) ②④

三、解答题(本大题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)  
(17) (本小题满分 14 分)

解: (I) 由  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 1$  得  $f'(x) = x^2 + 2mx$ .

因为  $f'(-1) = 3$ , 即  $1 - 2m = 3$ .

所以  $m = -1$ .

所以  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ ,  $f'(x) = x^2 - 2x$ .

因为  $f(1) = \frac{1}{3}$ ,  $f'(1) = -1$ .

所以函数  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y - \frac{1}{3} = -(x - 1)$ , 即  $3x + 3y - 4 = 0$ .

(II) 因为  $f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$ ,

令  $f'(x) > 0$ , 得  $x < 0$  或  $x > 2$ .

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, 0)$  和  $(2, +\infty)$ .

令  $f'(x) < 0$ , 得  $0 < x < 2$ .

所以函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $(0, 2)$ .

(18) (本小题满分 14 分)

解: (I) 圆  $C$  的方程可化为  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ , 圆心  $C(1, 2)$ , 半径是 2.

①当切线斜率存在时, 设切线方程为  $y - 1 = k(x - 3)$ , 即  $kx - y - 3k + 1 = 0$ .

因为  $d = \frac{|k - 2 - 3k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|2k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$ ,

所以  $k = \frac{3}{4}$ .

②当切线斜率不存在时，直线方程为  $x=3$ ，与圆  $C$  相切.

所以过点  $M(3,1)$  的圆  $C$  的切线方程为  $x=3$  或  $3x-4y-5=0$ .

(II) 因为弦  $AB$  的长为  $2\sqrt{3}$ ,

所以点  $C$  到直线  $l$  的距离为  $d_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = 1$ .

因为  $d_1 = \frac{|a-2+4|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$ .

所以  $a = -\frac{3}{4}$ .

(19) (本小题满分 14 分)

证明: (I) 因为底面  $ABCD$  为直角梯形,

所以  $BC \parallel AD$ .

因为  $BC \not\subset$  平面  $ADNM$ ,  $AD \subset$  平面  $ADNM$ ,

所以  $BC \parallel$  平面  $ADNM$ .

因为  $BC \subset$  平面  $PBC$ , 平面  $PBC \cap$  平面  $ADNM = MN$ ,

所以  $MN \parallel BC$ .

(II) ①因为  $M, N$  分别为  $PB, PC$  的中点,  $PA = AB$ ,

所以  $PB \perp MA$ .

因为  $\angle BAD = 90^\circ$ ,

所以  $DA \perp AB$ .

因为  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,

所以  $DA \perp PA$ .

因为  $PA \cap AB = A$ ,

所以  $DA \perp$  平面  $PAB$ .

所以  $PB \perp DA$ .

因为  $AM \cap DA = A$ ,

所以  $PB \perp$  平面  $ADNM$ .

因为  $DN \subset$  平面  $ADNM$ ,

所以  $PB \perp DN$ .

②由①可知  $PB \perp$  平面  $ADNM$ ,

所以  $MP$  为四棱锥  $P-ADNM$  的高.

因为  $PA = AD = AB = 2BC = 2$ ,  $M, N$  分别为  $PB, PC$  的中点,

所以  $MP = \sqrt{2}$ ,  $MN = \frac{1}{2}$ .

$$\text{所以 } V_{P-ADNM} = \frac{1}{3} S_{\text{梯形}ADNM} \cdot MP = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{2} = \frac{5}{6}.$$

所以四棱锥  $P-ADNM$  的体积为  $\frac{5}{6}$ .

解：(I) 因为椭圆经过点  $A(0, -1)$ ， $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

由  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得  $a = 2$ .

所以椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(II) ①若过点  $B(0, \frac{3}{5})$  的直线斜率不存在,  $M, N$  两点中有一个点与  $A$  点重合, 不满足题目条件.

②若过点  $B(0, \frac{3}{5})$  的直线斜率存在, 设直线  $MN$  的方程为  $y=kx+\frac{3}{5}$ .

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + \frac{3}{5} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{可得 } (1+4k^2)x^2 + \frac{24}{5}kx - \frac{64}{25} = 0.$$

$$\text{则} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{24k}{5(1+4k^2)} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{64}{25(1+4k^2)} \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

设  $MN$  的中点为  $P$ ，则  $P(\frac{-12k}{5(1+4k^2)}, \frac{3}{5(1+4k^2)})$ .

如果  $|AM|=|AN|$ ，那么  $AP \perp MN$  .

若  $k=0$ ，则  $P(0, \frac{3}{5})$ ，显然满足  $AP \perp MN$ ，此时直线  $MN$  的方程为  $y = \frac{3}{5}$ ；





因此  $f'(x) \geq f'(e) = -e^2 + m$  .

即:  $\frac{1}{e} < -e^2 + m$  .

因此  $m > \frac{1}{e} + e^2$  .



## 昌平区 2015—2016 学年第一学期高二年级文科期末考试数学试卷部分答案解析

1. 【答案】A

【解析】如果一个命题的逆命题是真命题，则该命题的否命题必是真命题，因为两者互为逆否的关系。

2. 【答案】C

【解析】由题意可得直线的两点式方程为： $\frac{y-3}{x-2} = \frac{7-3}{4-3}$ ，

化为一般式可得： $2x - y - 1 = 0$ 。

3. 【答案】A

【解析】将  $x = -3$ ， $y = 1$  代入直线  $l$  得： $-3 - 1 + 4 = 0$ ，满足方程，是充分条件，

若点  $P$  在直线  $l$  上，不一定满足  $x = -3$ ， $y = 1$ ，不是必要条件。

4. 【答案】D

【解析】 $\because f(x) = \sin x + \cos x$ ，

$\therefore f'(x) = \cos x - \sin x$ ，

则  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = -1$

5. 【答案】C

【解析】在长方体模型  $ABCD - A'B'C'D'$  中， $A'B' \parallel$  平面  $ABCD$ ， $A'D' \parallel$  平面  $ABCD$ ，但  $A'B'$  与  $A'D'$  不平行，故命题  $p$  为假命题。

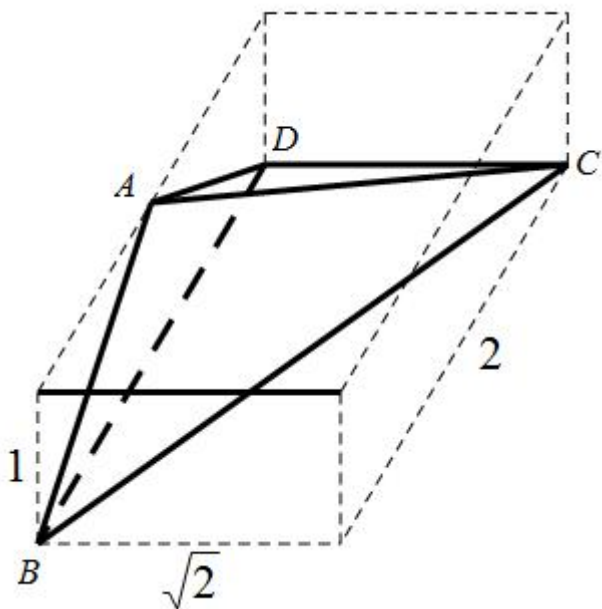
由平行公理可知命题  $q$  为真命题，于是  $(\neg p) \wedge q$  为真命题， $(\neg p) \vee q$  为真命题。

6. 【答案】B

【解析】抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点  $F$  为  $(2, 0)$ ，设直线  $AB$  的方程为  $y - 0 = (x - 2)$ ，即为  $y = x - 2$ ，代入抛物线的方程，可得： $x^2 - 12x + 4 = 0$ ，设  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则  $x_1 + x_2 = 12$ ，由抛物线的定义可得  $|AB| = x_1 + x_2 + p = 12 + 4 = 16$ 。

7. 【答案】A

【解析】将三视图还原直观图，如下图：



计算得： $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = 1$ ， $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} = \sqrt{2}$ ，累加即可。

8. 【答案】C

【解析】圆的方程可化简为： $(x-1)^2 + (y-m)^2 = 1$ ，圆心  $C(1, m)$ ，半径为 1，切线长最短时， $CP$  最小，

$|CP| = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-m)^2} = \sqrt{(m-1)^2 + 9}$ ,  $\therefore$  当  $m=1$  时,  $CP$  最小, 切线长最短.

9. 【答案】C

【解析】设  $M(x, y)$ , 则  $\overrightarrow{MF_1} = (-\sqrt{3}-x, -y)$ ,  $\overrightarrow{MF_2} = (\sqrt{3}-x, -y)$ ,  $\overrightarrow{MF_1} + \overrightarrow{MF_2} = (-2x, -2y)$ , 依题有:

$\sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2} = 2\sqrt{3}$ , 结合方程  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  联立解得  $|y| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 故  $S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot |y| = 1$ .

10. 【答案】B

【解析】 $f(a+1) - f(a) = \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = f'(x_0)$ ,  $x_0 \in (a, a+1)$ .

$\therefore$  函数是增函数, 且增长速度逐渐变慢,

$\therefore$  函数切线的斜率逐渐变小,

$\therefore 0 < f'(a+1) < f(a+1) - f(a) < f'(a)$ .

11. 【答案】 $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$

【解析】命题是全称命题, 则命题的否定是:  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$ .

12. 【答案】-2 或 1

【解析】两直线平行, 则可得  $\frac{1+a}{2} = \frac{1}{a} \neq \frac{1}{2}$ , 解得  $a = -1$  或  $1$ .

13. 【答案】4;  $24\pi$

【解析】由圆柱的体积公式得  $16\pi = 4\pi h$ ,

$\therefore$  圆柱的高  $h = 4$ ,

$\therefore$  圆柱的母线长  $l = h = 4$ ;

圆柱的表面积  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi \times 2^2 + 2\pi \times 2 \times 4 = 24\pi$ .

14. 【答案】5; (2, 4)

【解析】抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点的坐标为 (2, 0), 定点  $A(2, 5)$  在抛物线的外部, 由抛物线的定义,

$|PA| + |PE| = |PA| + |PF|$ , 当  $P, A, F$  三点共线时,  $|PA| + |PE|$  最小,  $|PA| + |PE|$  的最小值为 5, 此时点  $P$  的坐标为 (2, 4).

15. 【答案】 $(1, \sqrt{2}]$

【解析】圆的方程化为  $(x-2)^2 + y^2 = 2$ , 圆心 (2, 0), 半径  $\sqrt{2}$ .

$\therefore$  双曲线的渐近线与圆有交点,

$\therefore \frac{|2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \sqrt{2}$ , 化为  $b^2 \leq a^2$ .

$\therefore 1 < e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \leq \sqrt{2}$ .

$\therefore$  该双曲线的离心率的取值范围是  $(1, \sqrt{2}]$ .

16. 【答案】②④

【解析】 $f'(x) = \ln x + 2x - 1$ , 显然导函数  $f'(x)$  单调递增, 且  $f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} - 2 < 0$ ,  $f'(1) = 1 > 0$ , 因此  $\frac{1}{e} < x_0 < 1$ ,

②正确

构造  $f(x_0) + x_0 = x_0 \ln x_0 + (x_0 - 1)^2 + x_0$ , 由题意  $f'(x_0) = 0$ , 得  $\ln x_0 + 2x_0 - 1 = 0$ , 故  $\ln x_0 = 1 - 2x_0$ , 进而

$f(x_0) + x_0 = x_0 \ln x_0 + (x_0 - 1)^2 + x_0 = 1 - x_0^2$ , 因为  $\frac{1}{e} < x_0 < 1$ , 故

$f(x_0) + x_0 = 1 - x_0^2 > 0$ , ④正确.

