

民大附中 2015-2016 高二理科第一学期期末考试

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1、设 i 为虚数单位，则 $i^{2014} = ()$.

- A. 1 B. i C. -1 D. $-i$

2、已知等差数列 $1, a, b$ ，又 $4, a+2, b+1$ 为等比数列，求该等差数列的公差 $()$.

- A. -1 B. 0 C. 2 D. 1

3、已知条件 $p: x > 1$ ，条件 $q: \frac{1}{x} \leq 1$ ，则 p 是 q 的 $()$.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4、已知点 $P(x, y)$ 在不等式组 $\begin{cases} y \leq x \\ y \geq -x \\ x \leq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域内，则 $z = 2x + y$ 的最大值为 $()$.

- A. 6 B. 4 C. 2 D. 1

5、已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$ ，它的一个焦点坐标为

$(2, 0)$ ，求双曲线的方程 $()$.

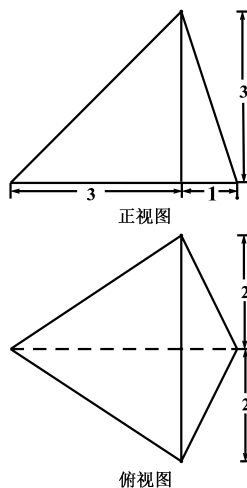
- A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ B. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$
C. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$

6、某三棱锥的正视图和俯视图如图所示，其左视图的面积为 $()$.

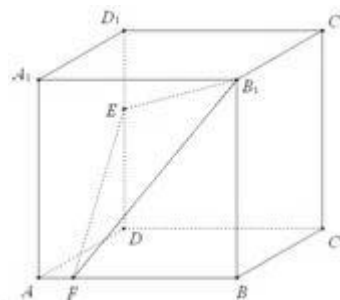
- A. 6 B. $\frac{9}{2}$
C. 3 D. $\frac{3}{2}$

7、抛物线 $y = x^2$ 上一动点 M 到直线 $l: x - y - 1 = 0$ 距离的最小值为 $()$.

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$



8、如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为棱 DD_1, AB 上的点，则下列判断中正确的个数有（ ）。



- ① $A_1C \perp$ 平面 B_1EF
- ② $\triangle B_1EF$ 在侧面 BCC_1B_1 上的正投影是面积为定值的三角形
- ③ 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内总存在与平面 B_1EF 平行的直线
- ④ 平面 B_1EF 内与平面 $ABCD$ 所成的二面角（锐角）的大小与点 E 的位置有关，而与点 F 的位置无关

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

9、已知命题 $p: \forall x \in R, x^2 - x + 3 > 0$ ，则 $\neg p$ 为：_____。

10、定积分 $\int_0^{\pi} (x + \cos x) dx =$ _____。

11、在 $\triangle ABC$ 中，若 $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{7}, \angle B = \frac{5\pi}{6}$ ，则边 $c =$ _____。

12、已知圆 C 的圆心位于第二象限且在直线 $y = 2x + 1$ 上，若圆 C 与两个坐标轴都相切，则圆 C 的标准方程为_____。

13、若抛物线 $y = ax^2$ 的焦点与双曲线 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ 的焦点重合，则 $a =$ _____。

14、对于 $n \in N^*$ ，将 n 表示为 $n = a_0 \cdot 2^k + a_1 \cdot 2^{k-1} + \dots + a_{k-1} \cdot 2^1 + a_k \cdot 2^0$ ，当 $i = 0$ 时， $a_i = 1$ ，

当 $1 \leq i \leq k$ 时， $a_i = 0$ 或 1 。记 $I(n)$ 为上述表示中 a 为 0 的个数（例如：

$1 = 1 \cdot 2^0, 4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ ，所以 $I(1) = 0, I(4) = 2$ ），则

(1) $I(12) =$ _____，(2) $I(1) + I(2) + \dots + I(2048) =$ _____。

三、解答题（共 80 分）

15、在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 3}$ ，求 a_2, a_3, a_4 的值，并由此猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项

公式，并用数学归纳法加以证明。

16、已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

(1) 求函数在 $x=e$ 处的切线方程;

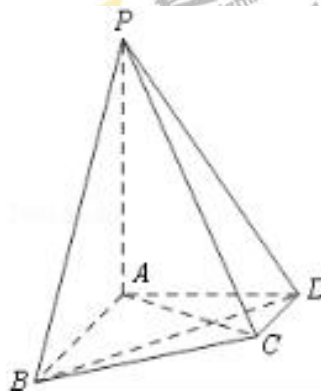
(2) 写出函数的单调增区间和最大值.

17、在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $PA = AB = 2CD = 4$, $PB = 2AD = 4\sqrt{2}$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$

(1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC

(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值

(3) 设点 Q 为线段 PB 上一点, 且直线 QC 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\frac{PQ}{PB}$ 的值



18、已知函数 $f(x) = \ln x - a^2 x^2 + ax (a \in R)$

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 求实数 a 的取值范围

19、已知点 $A(0,1)$, $B(0,-1)$, P 为一个动点, 且直线 PA 、 PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 设 $Q(2,0)$, 过点 $(-1,0)$ 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, $\triangle QMN$ 的面积记为 S , 对满

足条件的任意直线 l ，不等式 $S \leq \lambda \tan \angle MQN$ 恒成立，求 λ 的最小值.

20、已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ，其中 $n \in N^*$

(1) 若 $a_1 = 1, b_n = n$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_{n+1}b_{n-1} = b_n (n \geq 2)$ ，且 $b_1 = 1, b_2 = 2$

①记 $c_n = a_{6n-1} (n \geq 1)$ ，求证：数列 $\{c_n\}$ 为等差数列；

②若数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 中任意一项的值均未在该数列中重复出现无数次，求首项 a_1 应满足的条件.

民大附中 2015-2016 高二理科第一学期期末考试答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	A	C	C	A	B

二、填空题

9. $\exists x \in R, x^2 + x + 3 \leq 0$

10. $\frac{\pi^2}{2}$

11. 1

12. $(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{4}$

13. $\pm \frac{1}{8}$

14. 2, 9228

三、解答题

15. $a_2 = \frac{3}{7}, a_3 = \frac{3}{8}, a_4 = \frac{1}{3}$; 猜想 $a_n = \frac{3}{n+5}$; 数学归纳法易证;

16. (1) 切线方程: $(e-1)x - e^2y + 2e = 0$ (2) 单调增区间 $(1, +\infty)$, 单调减区间 $(0, 1)$, 最小值为 1, 无最大值

17. (1) 因为 $PA = 4, AB = 4, PB = 4\sqrt{2}$, 所以 $PA \perp AB$, 又因为平面 $PAB \perp$ 平面 PAC , AB 为其交线, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 又因为 $AB \perp AD$, 所以 AB, AD, PA 两两垂直, 建立如图所示的空间直角坐标系,

$A(0, 0, 0), B(4, 0, 0), C(2, 2\sqrt{2}, 0), D(0, 2\sqrt{2}, 0), P(0, 0, 4)$

所以 $\overrightarrow{BD} = (-4, 2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{PC} = (2, 2\sqrt{2}, -4)$

所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$, 从而 $BD \perp PC$

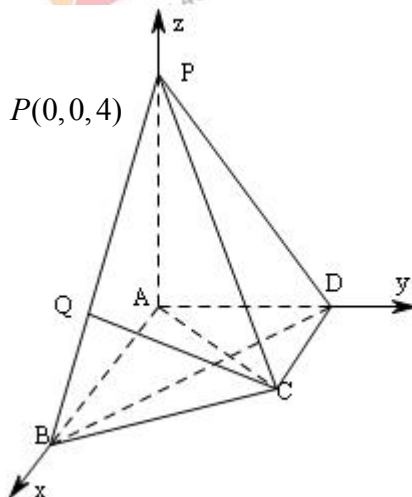
又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$

$BD \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $BD \perp PA$

又因为 PA 与 PC 相交

所以 $BD \perp$ 平面 PAC



(2) $\frac{\sqrt{15}}{15}$

(3) $\frac{7}{12}$

18. (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

若 $a=1$, $f'(x) = \frac{(2x+1)}{x}(-x+1)$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增

(2) $f'(x) = \frac{(-ax+1)(2ax+1)}{x}$

①若 $a=0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加

②若 $a>0$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调增加, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调减少;

③若 $a<0$, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2a})$ 上单调增加, 在 $(-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调减少;

综上, a 的取值范围为 $[1, +\infty) \cup (-\infty, -\frac{1}{2}]$

19. (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (x \neq 0)$

(2) 轨迹 C 方程: $x^2 + 2y^2 = 2 (x \neq 0)$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, $P(-1, 0)$

①若直线 l 斜率不存在, 则 $M(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}), N(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $S = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $\tan \angle MQN = \frac{6\sqrt{2}}{17}$,

此时 $\lambda \geq \frac{17}{4}$

②若直线 l 斜率不存在, 设直线 $l: y = kx + k$, 并不妨假 $x_1 > x_2$, 此时 $y_1 > 0, y_2 < 0$

联立直线与轨迹 C 的方程可知: $(1+2k^2)x^2 + 4k^2x + (2k^2-2) = 0$, 由于直线恒过点

$(-1, 0)$, 且 $(-1, 0)$ 在椭圆内部, 所以恒成立;

由韦达定理可得 $x_1x_2 = \frac{2k^2-2}{1+2k^2}$, $x_1+x_2 = -\frac{4k^2}{1+2k^2}$; (*)

$\triangle QMN$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |y_1 - y_2| = \frac{3}{2} |kx_1 - kx_2|$;

$$\tan \angle MQN = \tan(\angle MQP + \angle NQP) = \frac{\tan \angle MQP + \tan \angle NQP}{1 - \tan \angle MQP \cdot \tan \angle NQP} = \frac{\frac{y_1}{2-x_1} + \frac{-y_2}{2-x_2}}{1 - \frac{y_1(-y_2)}{(2-x_1)(2-x_2)}}$$

化简得 $\tan \angle MQN = \frac{3|kx_1 - kx_2|}{(k^2 - 2)(x_1 + x_2) + (k^2 + 1)x_1x_2 + (k^2 + 4)}$

于是 $\lambda \geq \frac{S}{\tan \angle MQN} = \frac{(k^2 - 2)(x_1 + x_2) + (k^2 + 1)x_1x_2 + (k^2 + 4)}{2}$,

将 (*) 式代入得 $\lambda \geq \frac{17k^2 + 2}{2(2k^2 + 1)} = \frac{17}{4} + \frac{-\frac{13}{2}}{4k^2 + 2}$,

所以 $\lambda < \frac{17}{4}$

综上所述, λ 的最大值为 $\frac{17}{4}$

20. (1) 由累加法可知 $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$

(2) ① $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 2, b_4 = 1, b_5 = \frac{1}{2}, b_6 = \frac{1}{2}, b_7 = 1, b_8 = 2, b_9 = 2 \dots$,

可知: $b_{6k+1} = b_{6k+4} = 1, b_{6k+2} = b_{6k+3} = 2, b_{6k+5} = b_{6k+6} = \frac{1}{2}$, 其中 $k \in N$

$c_{n+1} - c_n = a_{6n+5} - a_{6n-1} = \sum_{i=0}^5 (a_{6n+i} - a_{6n+(i-1)})$, 其中 $n \in N^*$
 $= b_{6n+4} + b_{6n+3} + b_{6n+2} + b_{6n+1} + b_{6n} + b_{6n-1} = 7$

所以 $c_{n+1} - c_n = 7$, 所以 $\{c_n\}$ 为等差数列

②由①可知 $a_{6n-5} = a_1 + 7(n-1)$,

$a_{6n-4} = (a_1 + 1) + 7(n-1)$,

$a_{6n-3} = (a_1 + 3) + 7(n-1)$,

$a_{6n-2} = (a_1 + 5) + 7(n-1)$,

$a_{6n-1} = (a_1 + 6) + 7(n-1)$,

$a_{6n} = (a_1 + \frac{13}{2}) + 7(n-1)$

要使得 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 中任何一项不重复出现无数次,

只要 $\frac{a_1 + 7(n-1)}{6n-5}$ 不为常数,

$$\frac{(a_1+1)+7(n-1)}{6n-4} \text{ 不为常数……,}$$

$$\frac{(a_1+\frac{13}{2})+7(n-1)}{6n} \text{ 不为常数,}$$

即 $a \neq \frac{7}{6}, a \neq \frac{4}{3}, a \neq \frac{1}{2}, a \neq -\frac{1}{3}, a \neq -\frac{1}{6}$

民大附中 2015-2016 高二理科第一学期期末考试部分解析

1. 【答案】C

【解析】 $i^{2014} = (i^2)^{1007} = (-1)^{1007} = -1$.

2. 【答案】D

【解析】由等差数列可得： $2a = 1 + b$,

由等比数列可得： $4(b+1) = (a+2)^2$,

解得： $a = 2$, $b = 3$,

可得公差 $d = a - 1 = 1$.

3. 【答案】A

【解析】 $q: x \geq 1$ 或 $x < 0$, 于是 p 能推出 q , 反之不成立. 所以 p 是 q 的充分不必要条件.

4. 【答案】A

【解析】不等式组 $\begin{cases} y \leq x \\ y \geq -x \\ x \leq 2 \end{cases}$ 围成一个三角形区域 (包含边界), 三角形顶点分别为 $O(0,0)$, $B(2,2)$, $C(2,-2)$, $z = 2x + y$ 的最大值的几何意义是 $y = -2x + z$ 的纵截距, 由此可求 $z = 2x + y$ 的最大值.

5. 【答案】C

【解析】依题有 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \sqrt{3} \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$.

6. 【答案】C

【解析】根据三视图“长对正, 高平齐, 宽相等”的成图原则, 左视图应为一个底边为 4, 高为 3 的等腰三角形, 故面积为 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

7. 【答案】A

【解析】设抛物线上的任意一点 $M(m, m^2)$,

M 到直线 l 的距离 $d = \frac{|m - m^2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(m - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right|}{\sqrt{2}},$

由二次函数的性质可知，当 $m = \frac{1}{2}$ 时最小距离 $d = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

8. 【答案】B

【解析】①：取 BB_1 中点 G ，连接 EG ，若 $A_1C \perp B_1EF$ ，则 $A_1C \perp B_1E$ ，又易证 $A_1C \perp EG$ ，故 $A_1C \perp B_1G$ ，进而有 $A_1C \perp AA_1$ ，矛盾，故①错误；

②：正投影为与正方形 BCC_1B_1 同底等高的三角形，故面积为正方形面积的一半，②正确；

③：过 E 做与底面平行的平面，此平面必与 B_1F 有交点，设交点为 G ，则 EG 即为满足条件的直线，③正确.

④：假设 E 与 D 重合，当 F 与 A 重合时，二面角大小为 $\frac{\pi}{4}$ ；当 F 与 B 重合时，二面角大小为 $\frac{\pi}{2}$ ，④错误.

9. 【答案】 $\exists x \in R, x^2 + x + 3 \leq 0$

【解析】 $\exists x \in R, x^2 + x + 3 \leq 0$.

10. 【答案】 $\frac{\pi^2}{2}$

【解析】 $\int_0^{\pi} (x + \cos x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + \sin x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$.

11. 【答案】1

【解析】由余弦定理可得： $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，

代入化简可得： $c^2 + 3c - 4 = 0$ ，

解得： $c = 1$ 或 $c = -4$ （舍去）.

12. 【答案】 $(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{4}$

【解析】设圆心坐标为 $(a, 2a + 1)$ ，

圆与两坐标轴相切，

所以 $a = -(2a + 1)$ ，

所以 $a = -\frac{1}{3}$ ，

所以圆心为 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ，

半径为 $\frac{1}{3}$,

所以圆的标准方程为 $(x+\frac{1}{3})^2 + (y-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{4}$.

13. 【答案】 $\pm\frac{1}{8}$

【解析】双曲线的 $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $c=\sqrt{3+1}=2$,

则焦点为 $(0, \pm 2)$,

抛物线可整理为: $x^2 = \frac{1}{a}y$,

焦点为 $(0, \frac{1}{4a})$,

有题意可得: $\frac{1}{4a} = \pm 2$,

解得: $a = \pm\frac{1}{8}$.

14. 【答案】 2, 9228

【解析】第一问代入即可;

第二问: $I(1) = 0 = 0 \cdot 2^{-1}$,

$I(2) + I(3) = 1 = 1 \cdot 2^0$,

$I(4) + I(5) + I(6) + I(7) = 4 = 2 \cdot 2^1$,

$I(8) + I(9) + \cdots + I(15) = 12 = 3 \cdot 2^2$

所以 $I(1) + I(2) + \cdots + I(2048) = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \cdots + 10 \cdot 2^9 + 11 = 9228$