

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1.命题“若  $a > 1$ ，则  $a > 0$ ”的逆命题是（ ）.

- A.若  $a > 0$ ，则  $a > 1$       B.若  $a \leq 0$ ，则  $a > 1$   
C.若  $a > 0$ ，则  $a \leq 1$       D.若  $a \leq 0$ ，则  $a \leq 1$

2.圆心为  $(1, 2)$ ，且与  $y$  轴相切的圆的方程是（ ）.

- A.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$       B.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$   
C.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$       D.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$

3.在空间中，给出下列四个命题：

- ①平行于同一个平面的两条直线互相平行；  
②垂直于同一个平面的两个平面互相平行；  
③平行于同一条直线的两条直线互相平行；  
④垂直于同一条直线的两条直线互相平行.

其中真命题的序号是（ ）.

- A.①      B.②      C.③      D.④

4.实轴长为 2，虚轴长为 4 的双曲线的标准方程是（ ）.

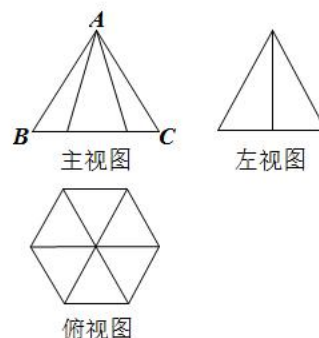
- A.  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$       B.  $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$   
C.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$  或  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$       D.  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  或  $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

5.“直线  $l$  垂直于平面  $\alpha$  内无数条直线”是“直线  $l$  垂直于平面  $\alpha$ ”的（ ）.

- A.充分而不必要条件      B.必要而不充分条件  
C.充分必要条件      D.既不充分也不必要条件

6.某几何体的三视图如图所示，其中主视图中  $\triangle ABC$  是边长为 2 的正三角形，俯视图为正六边形，那么该几何体的左视图的面积为（ ）.

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\sqrt{3}$   
C.  $\frac{3}{2}$       D. 3

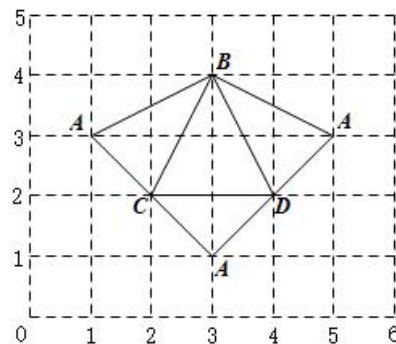


7. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点分别为  $F_1, F_2$ , 若椭圆上存在点  $P$  使得  $\angle F_1PF_2$  是钝角, 则椭圆离心率的取值范围是 ( ).

- A.  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$       B.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$       C.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$       D.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

8. 已知四面体  $ABCD$  的侧面展开图如图所示, 则其体积为 ( ).

- A. 2      B.  $\frac{3}{2}$   
C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{2}{3}$



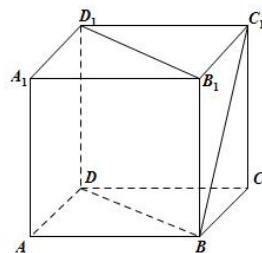
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。把答案填在题中横线上。

9. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 > 0$ ”的否定是\_\_\_\_\_。

10. 已知直线  $l_1: 2x - ay - 1 = 0$ ,  $l_2: ax - y = 0$ . 若  $l_1 \parallel l_2$ , 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_。

11. 已知双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的一个焦点是  $(2, 0)$ , 则其渐近线的方程为\_\_\_\_\_。

12. 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 直线  $BC_1$  和  $B_1D_1$  所成角的大小为\_\_\_\_\_; 直线  $BC_1$  和平面  $B_1D_1DB$  所成角的大小为\_\_\_\_\_。



13. 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中, 已知平面  $\alpha$  的一个法向量是  $\vec{n} = (1, -1, 2)$ , 且平面  $\alpha$  过点  $A(0, 3, 1)$ . 若  $P(x, y, z)$  是平面  $\alpha$  上任意一点, 则点  $P$  的坐标满足的方程是\_\_\_\_\_。

14. 平面内到定点  $F(0, 1)$  和定直线  $l: y = -1$  的距离之和等于 4 的动点的轨迹为曲线  $C$ . 关于曲线  $C$  的几何性质, 给出下列三个结论:

- ① 曲线  $C$  关于  $y$  轴对称;
- ② 若点  $P(x, y)$  在曲线  $C$  上, 则  $|y| \leq 2$ ;
- ③ 若点  $P$  在曲线  $C$  上, 则  $1 \leq |PF| \leq 4$ .

其中, 所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_。

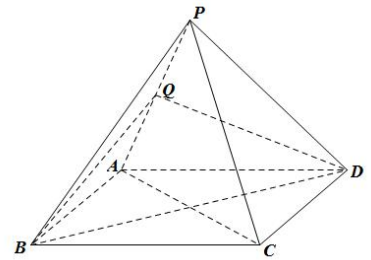
三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为菱形， $Q$  是棱  $PA$  的中点。

(I) 求证： $PC \parallel$  平面  $BDQ$ ；

(II) 若  $PB = PD$ ，求证：平面  $PAC \perp$  平面  $BDQ$ 。



16. (本小题满分 13 分)

已知抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的准线方程是  $x = -\frac{1}{2}$ 。

(I) 求抛物线的方程；

(II) 设直线  $y = k(x - 2)$  ( $k \neq 0$ ) 与抛物线相交于  $M$ ， $N$  两点， $O$  为坐标原点，证明：

$OM \perp ON$ 。

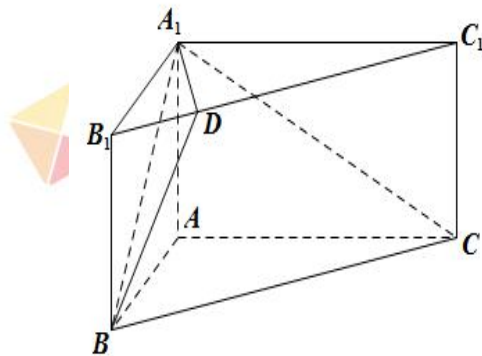
17. (本小题满分 13 分)

如图，在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $AA_1 = \sqrt{3}$ ， $AB = 2$ ，

点  $D$  在棱  $B_1C_1$  上，且  $B_1C_1 = 4B_1D$ 。

(I) 求证： $BD \perp A_1C$ ；

(II) 求二面角  $B - A_1D - B_1$  的大小。



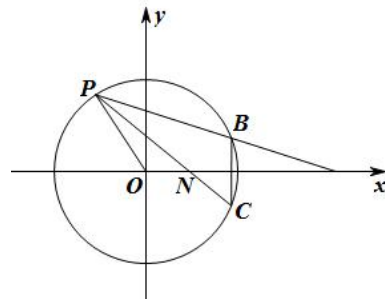
18. (本小题满分 13 分)

如图，在直角坐标系  $xOy$  中，已知圆  $O: x^2 + y^2 = 4$ 。点  $B, C$  在圆  $O$  上，且关于  $x$  轴对称。

(I) 当点  $B$  的横坐标为  $\sqrt{3}$  时，求  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$  的值；

(II) 设  $P$  为圆  $O$  上异于  $B, C$  的任意一点，直线  $PB, PC$  与  $x$  轴分别交于点  $M, N$ ，

证明： $|OM| \cdot |ON|$  为定值。



19. (本小题满分 14 分)

如图1，四棱锥  $P-ABCD$  中， $PD \perp$  底面  $ABCD$ ，底面  $ABCD$  是直角梯形， $M$  为侧棱  $PD$  上一点，该四棱锥的俯视图和左视图如图2所示.

(I) 求证:  $BC \perp$  平面  $PBD$ ;

(II) 求证:  $AM \parallel$  平面  $PBC$ ;

(III) 线段  $CD$  上是否存在点  $N$ ，使  $AM$  与  $BN$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ? 若存在，找到所有符合要求的点  $N$ ；若不存在，说明理由.

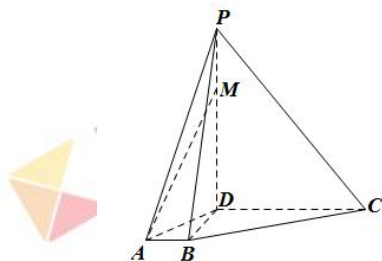


图1

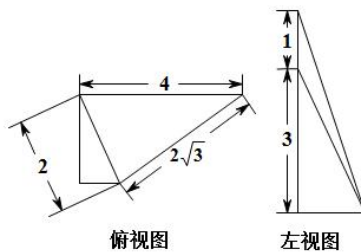


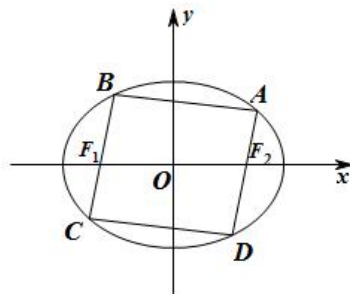
图2

20. (本小题满分 14 分)

如图，已知四边形  $ABCD$  是椭圆  $3x^2 + 4y^2 = 12$  的内接平行四边形，且  $BC$ ， $AD$  分别经过椭圆的焦点  $F_1$ ， $F_2$ .

(I) 若直线  $AC$  的方程为  $x - 2y = 0$ ，求  $AC$  的长;

(II) 求平行四边形  $ABCD$  面积的最大值.





一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1.A      2.B      3.C      4.D      5.B      6.C      7.B      8.D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 \leq 0$

10.  $\pm\sqrt{2}$

11.  $y = \pm\sqrt{3}x$

12.  $60^\circ, 30^\circ$

13.  $x - y + 2z + 1 = 0$

14. ①②③

注：12 题第一空 2 分，第二空 3 分；14 题少选不给分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15. (本小题满分 13 分)

【解析】

(I) 设  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ ，连结  $OQ$ .

因为底面  $ABCD$  为菱形，

所以  $O$  为  $AC$  中点.

因为  $Q$  是  $PA$  的中点，

所以  $OQ \parallel PC$ .

因为  $OQ \subset$  平面  $BDQ$ ， $PC \not\subset$  平面  $BDQ$ ，

所以  $PC \parallel$  平面  $BDQ$ .

(II) 连结  $OP$ .

因为底面  $ABCD$  为菱形，

所以  $BD \perp AC$ ， $O$  为  $BD$  中点.

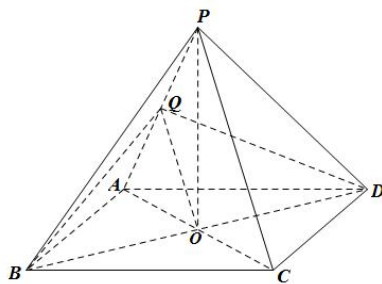
因为  $PB = PD$ ，

所以  $BD \perp PO$ .

所以  $BD \perp$  平面  $PAC$ .

因为  $BD \subset$  平面  $BDQ$ ，

所以平面  $PAC \perp$  平面  $BDQ$ .



16. (本小题满分 13 分)

【解析】(I) 因为抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的准线方程为  $x = -\frac{p}{2}$ ,

所以  $-\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$ , 解得  $p = 1$ ,

所以抛物线的方程为  $y^2 = 2x$ .

(II) 设  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ .

将  $y = k(x-2)$  代入  $y^2 = 2x$ ,

消去  $y$  整理得  $k^2x^2 - 2(2k^2 + 1)x + 4k^2 = 0$ .

所以  $x_1x_2 = 4$ .

由  $y_1^2 = 2x_1$ ,  $y_2^2 = 2x_2$ , 两式相乘, 得  $y_1^2y_2^2 = 4x_1x_2$ ,

注意到  $y_1, y_2$  异号, 所以  $y_1y_2 = -4$ .

所以直线  $OM$  与直线  $ON$  的斜率之积为  $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$ ,

即  $OM \perp ON$ .

17. (本小题满分 13 分)

【解析】(I) 因为  $ABC - A_1B_1C_1$  直三棱柱,

所以  $AA_1 \perp AB$ ,  $AA_1 \perp AC$ .

又  $AB \perp AC$ ,

所以  $AB, AC, AA_1$  两两互相垂直.

如图, 以  $A$  为原点, 建立空间直角坐标系  $A - xyz$ .

则  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$ ,  $A_1(0, 0, \sqrt{3})$ ,

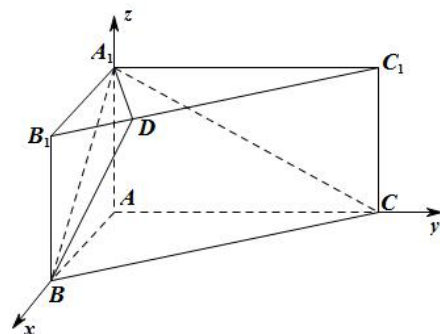
$B_1(2, 0, \sqrt{3})$ ,  $C_1(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

由  $\overrightarrow{B_1D} = \frac{1}{4}\overrightarrow{B_1C_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ , 得  $D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ .

所以  $\overrightarrow{BD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ ,  $\overrightarrow{A_1C} = (0, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ .

因为  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 3 - 3 = 0$ ,

所以  $BD \perp A_1C$ .





(II)  $\overrightarrow{BD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ ,  $\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -\sqrt{3})$ .

设平面  $A_1DB$  的一个法向量为  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ , 则  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$ ,

所以  $\begin{cases} 2x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}$ , 取  $z_1 = 1$ , 得  $\vec{m} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$ .

又平面  $A_1DB_1$  的一个法向量为  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ,

所以  $\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1}} = \frac{1}{2}$ ,

因为二面角  $B-A_1D-B_1$  的平面角是锐角,

所以二面角  $B-A_1D-B_1$  的大小是  $60^\circ$ .

18. (本小题满分 13 分)

【解析】(I) 因为点  $B$  在圆  $O$  上, 横坐标为  $\sqrt{3}$ .

不妨设  $B(\sqrt{3}, 1)$ , 由对称性知  $C(\sqrt{3}, -1)$ ,

所以  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3 - 1 = 2$ .

(II) 设  $B(x_0, y_0)$ , 由对称性知  $C(x_0, -y_0)$ , 且  $x_0^2 + y_0^2 = 4$ .

设  $P(x_1, y_1)$  ( $y_1 \neq \pm y_0$ ), 则  $x_1^2 + y_1^2 = 4$ .

$l_{PB}: y - y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$ ,  $l_{PC}: y - y_1 = \frac{y_1 + y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$ .

在上述方程中分别令  $y = 0$ , 解得,

$x_M = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$ ,  $x_N = \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_1 + y_0}$ .

所以  $x_M \cdot x_N = \frac{x_0^2 y_1^2 - x_1^2 y_0^2}{y_1^2 - y_0^2} = \frac{(4 - y_0^2)y_1^2 - (4 - y_1^2)y_0^2}{y_1^2 - y_0^2} = 4$ .

所以  $|OM| \cdot |ON| = 4$ .

19. (本小题满分 14 分)

【解析】(I) 由俯视图可得,  $BD^2 + BC^2 = CD^2$ ,

所以  $BC \perp BD$  .

又因为  $PD \perp$  平面  $ABCD$  ,

所以  $BC \perp PD$  ,

所以  $BC \perp$  平面  $PBD$  .

(II) 取  $PC$  上一点  $Q$  , 使  $PQ:PC=1:4$  , 连结  $MQ$  ,  $BQ$  .

由左视图知  $PM:PD=1:4$  , 所以  $MQ \parallel CD$  ,  $MQ = \frac{1}{4}CD$  .

在  $\triangle BCD$  中, 易得  $\angle CDB = 60^\circ$  , 所以  $\angle ADB = 30^\circ$  ,

又  $BD = 2$  , 所以  $AB = 1$  ,  $AD = \sqrt{3}$  .

又因为  $AB \parallel CD$  ,  $AB = \frac{1}{4}CD$  , 所以  $AB \parallel MQ$  ,  $AB = MQ$  .

所以四边形  $ABQM$  为平行四边形, 所以  $AM \parallel BQ$  .

因为  $AM \not\subset$  平面  $PBC$  ,  $BQ \subset$  平面  $PBC$  ,

所以直线  $AM \parallel$  平面  $PBC$  .

(III) 线段  $CD$  上存在点  $N$  , 使  $AM$  与  $BN$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  .

证明如下:

因为  $PD \perp$  平面  $ABCD$  ,  $DA \perp DC$  , 建立如图所示的空间直角坐标系  $D-xyz$  .

所以  $D(0,0,0)$  ,  $A(\sqrt{3},0,0)$  ,  $B(\sqrt{3},1,0)$  ,  $C(0,4,0)$  ,  $M(0,0,3)$  .

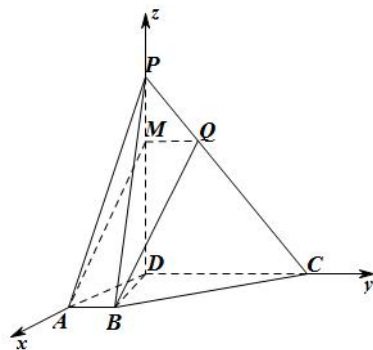
其中  $N(0,t,0)$  .

所以  $\overrightarrow{AM} = (-\sqrt{3}, 0, 3)$  ,  $\overrightarrow{BN} = (-\sqrt{3}, t-1, 0)$  .

要使  $AM$  与  $BN$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  , 则有  $\frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}|}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{BN}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$  .

所以  $\frac{|3|}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3+(t-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$  , 解得  $t=0$  或  $2$  , 均适合  $N(0,t,0)$  .

故点  $N$  位于  $D$  点处, 或  $CD$  中点处时, 均符合题意.



20. (本小题满分 14 分)

【解析】(I) 由  $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$  , 解得  $x=\pm\sqrt{3}$  ,

所以  $A, C$  两点的坐标为  $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  和  $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

所以  $|AC| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}$ .

(II) ①当直线  $AD$  的斜率不存在时,

此时易得  $A\left(1, \frac{3}{2}\right), B\left(-1, \frac{3}{2}\right), C\left(-1, -\frac{3}{2}\right), D\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ ,

所以平行四边形  $ABCD$  的面积为  $|AB| \cdot |CD| = 6$ .

②当直线  $AD$  的斜率存在时, 设直线  $AD$  的方程为  $y = k(x-1)$ ,

将其代入椭圆方程, 整理得  $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ .

设点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ .

则  $x_1 + x_4 = \frac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_4 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$ .

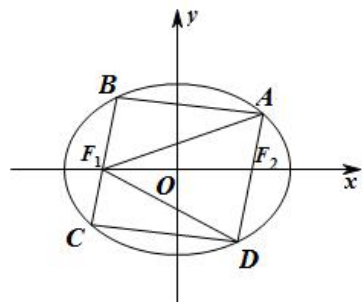
连结  $AF_1, DF_1$ ,

则平行四边形  $ABCD$  的面积  $S = 2S_{\triangle AF_1D} = |F_1F_2| \cdot |y_1 - y_4| = 2|y_1 - y_4|$ .

又  $(y_1 - y_4)^2 = k^2(x_1 - x_4)^2 = k^2[(x_1 + x_4)^2 - 4x_1x_4] = 9 \times \frac{16k^2(k^2+1)}{(3+4k^2)^2}$ .

所以  $S = 6\sqrt{\frac{16k^2(k^2+1)}{(3+4k^2)^2}} < 6$ .

综上, 平行四边形  $ABCD$  面积的最大值是 6.



## 选填解析

## 一、选择题

## 1. 【答案】A

【解析】互换原命题的题设和结论，得，逆命题为“若  $a > 0$ ，则  $a > 1$ ”。

故选 A.

## 2. 【答案】B

【解析】圆心坐标为  $(1, 2)$ ，且与  $y$  轴相切，所以圆的半径  $r = 1$ ，则所求的圆的方程为

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

故选 B.

## 3. 【答案】C

【解析】①平行于同一个平面的两条直线有三种位置关系：相交，平行，异面，故错误；

②垂直于同一个平面的两个平面有两种位置关系：平行，相交，故错误；

④垂直于同一条直线的两条直线有三种位置关系：相交，平行，异面，故错误。

故选 C.

## 4. 【答案】D

【解析】实轴长为 2，虚轴长为 4，即  $2a = 2$ ， $2b = 4$ ，所以方程为： $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  或  $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ 。

故选 D.

## 5. 【答案】B

【解析】根据线面垂直的定义可知，直线  $l$  与平面  $\alpha$  内任意直线都垂直，

当直线  $l$  垂直于平面  $\alpha$  内无数条直线垂直时，这无数条直线若为平行关系，则  $l$  与平面  $\alpha$  不垂直，故是必要不充分条件。

故选 B.

## 6. 【答案】C

【解析】由三视图知，几何体为正六棱锥，主视图中  $\triangle ABC$  是边长为 2 的正三角形，底面六边形的边长为 1，所以棱锥的高为  $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，由俯视图可知，俯视图宽为  $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，

则左视图的面积为  $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$ 。

故选 C.

### 7. 【答案】B

【解析】如图，当动点  $P$  在椭圆长轴端点处沿椭圆弧向短轴端点运动时， $P$  对两个焦点的张角  $\angle F_1PF_2$  渐渐增大，当且仅当  $P$  点位于短轴端点  $P_0$  处时，张角  $\angle F_1PF_2$  达到最大值，

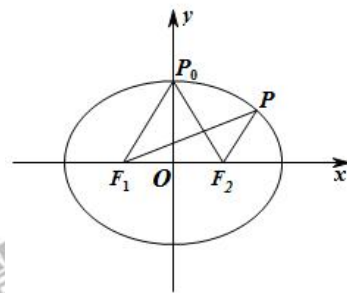
由此可得，在  $\triangle P_0F_1F_2$  中， $\angle F_1P_0F_2 > 90^\circ$ ，

所以  $\text{Rt}\triangle P_0OF_2$  中， $\angle OP_0F_2 > 45^\circ$ ，

所以  $P_0O < OF_2$ ，即  $b < c$ ，所以  $a^2 - c^2 < c^2$ ，可得  $a^2 < 2c^2$ ，

所以  $e > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，又因为  $0 < e < 1$ ，所以  $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$ 。

故选 B。



### 8. 【答案】D

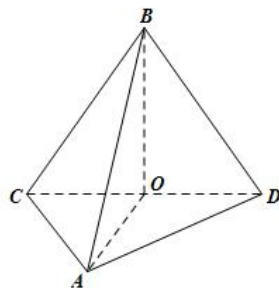
【解析】由题意可知三棱锥的底面是等腰直角三角形，

腰长为： $\sqrt{2}$ ，斜边为 2，3 条侧棱相等为： $\sqrt{5}$ ，

如图  $\triangle BOC \cong \triangle BOA \cong \triangle BOD$ ，可得  $BO$  是三棱锥的高为 2。

四面体  $ABCD$  的体积为： $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times CD \times OA \times OB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$ 。

故选 D。



## 二、填空题

### 9. 【答案】 $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 \leq 0$

【解析】因为全称命题的否定是存在命题，所以答案为  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 \leq 0$ 。

故答案为  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 \leq 0$ 。

### 10. 【答案】 $\pm\sqrt{2}$

【解析】根据两直线平行的性质，可得  $2 \times (-1) - (-a) \times a = 0$ ，即  $a^2 = 2$ ，解得  $a = \pm\sqrt{2}$ 。

故答案为  $\pm\sqrt{2}$ 。

### 11. 【答案】 $y = \pm\sqrt{3}x$

【解析】由方程可知  $a^2 = 1$ ，又焦点为  $(2, 0)$ ，则  $c^2 = 4$ ，解得  $b^2 = 3$ ，所以渐近线方程为

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x.$$

故答案为  $y = \pm \sqrt{3}x$ .

12. 【答案】  $60^\circ$ ,  $30^\circ$

【解析】 连结  $DC_1$ ,  $A_1C_1$ , 设  $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$ , 连结  $BO$ .

因  $B_1D_1 \parallel BD$ , 所以  $\angle DBC_1$  是线  $BC_1$  和  $B_1D_1$  所成角,

又  $BD = BC_1 = DC_1$ , 所以  $\angle DBC_1 = 60^\circ$ .

直线  $BC_1$  和  $B_1D_1$  所成的角大小为  $60^\circ$ ;

正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,

由  $B_1D_1 \perp A_1C_1$ ,  $B_1B_1 \perp A_1C_1$ ,  $B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$ ,

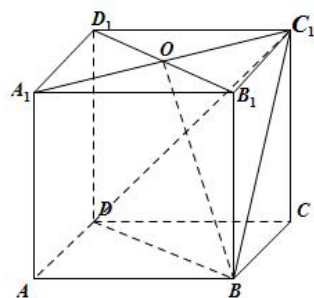
所以  $C_1O \perp$  平面  $B_1D_1DB$ ,

所以  $\angle OBC_1$  是直线  $BC_1$  和  $B_1D_1DB$  所成角,

因为  $OC_1 = \frac{1}{2}BC_1$ , 所以  $\sin \angle OBC_1 = \frac{OC_1}{BC_1} = \frac{1}{2}$ .

所以  $\angle OBC_1 = 30^\circ$ .

所以直线  $BC_1$  和平面  $B_1D_1DB$  所成角为  $30^\circ$ .



13. 【答案】  $x - y + 2z + 1 = 0$

【解析】 有题意可知  $\overrightarrow{AP} = (x, y - 3, z - 1)$ , 平面  $\alpha$  的一个法向量是  $\vec{n} = (1, -1, 2)$ , 所以

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$ , 即  $(x, y - 3, z - 1) \cdot (1, -1, 2) = 0$ , 所以  $x - y + 2z + 1 = 0$ .

故答案为  $x - y + 2z + 1 = 0$ .

14. 【答案】 ①②③

【解析】 设  $P(x, y)$  是曲线  $C$  上的任意一点.

因为曲线  $C$  是平面内到定点  $F(0, 1)$  和定直线  $l: y = -1$  的距离之和等于 4 的点的轨迹, 所以

$|PF| + |y + 1| = 4$ , 即  $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + |y + 1| = 4$ , 解得  $y \geq -1$  时,  $y = 2 - \frac{1}{4}x^2$ , 当  $y < -1$  时,

$$y = \frac{1}{12}x^2 - 2.$$

显然①正确; 若点在曲线上, 则  $|y| \leq 2$ , ②正确; 若点  $P$  在曲线  $C$  上,  $|PF| + |y + 1| = 4$ ,  $|y| \leq 2$

则  $1 \leq |PF| \leq 4$ , 所以③正确.

故答案为①②③.