

北京市顺义区 2015-2016 学年上学期期末
高二数学（理科）试卷

2016.1

一、选择题：本大题供 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 直线 $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ 的倾斜角是 ().

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 直线 l 过点 $P(2, -2)$ ，且与直线 $x + 2y - 3 = 0$ 垂直，则直线 l 的方程为

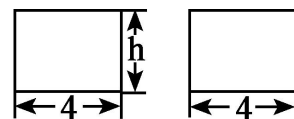
().

A. $2x + y - 2 = 0$

B. $2x - y - 6 = 0$

C. $x - 2y - 6 = 0$

D. $x - 2y + 5 = 0$



主(正)视图 左(侧)视图

3. 一个几何体的三视图如图所示，如果该几何体的侧面面积为 12π ，则该几何体的体积是 ().

A. 4π

B. 12π

C. 16π

D. 48π



俯视图

4. 在空间中，下列命题正确的是 ().

A. 如果直线 $m \parallel$ 平面 α ，直线 $n \subset \alpha$ ，那么 $m \parallel n$

B. 如果平面 α 内的两条直线都平行于平面 β ，那么平面 $\alpha \parallel$ 平面 β

C. 如果平面 α 外的一条直线 m 垂直于平面 α 内的两条相交直线，那么 $m \perp \alpha$

D. 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β ，任取直线 $m \subset \alpha$ ，那么必有 $m \perp \beta$

5. 如果直线 $3ax + y - 1 = 0$ 与直线 $(1 - 2a)x + ay + 1 = 0$ 平行，那么 a 等于 ().

A. -1

B. $\frac{1}{3}$

C. 3

D. -1 或 $\frac{1}{3}$

6. 方程 $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ ($a \neq 0$) 表示的圆 ().

A. 关于 x 轴对称

B. 关于 y 轴对称

C. 关于直线 $y = x$ 轴对称

D. 关于直线 $y = -x$ 轴对称

7. 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E ， F 分别是 AA_1 ， AD 的中点，则 CD_1 与

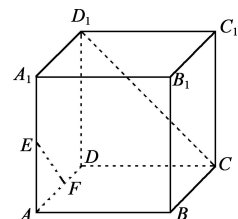
EF 所成角为 ().

A. 0°

B. 45°

C. 60°

D. 90°



8. 如果过点 $M(-2, 0)$ 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 有公共点, 那么直线 l 的斜率 k 的取值范围是 ().

- A. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ C. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 已知双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$, 则该双曲线的焦点坐标为 _____, 渐近线方程为 _____.

10. 已知向量 $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-5, y, -2)$ 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $y =$ _____.

11. 已知点 $A(m, -2, n)$, 点 $B(-5, 6, 24)$ 和向量 $\vec{a} = (-3, 4, 12)$ 且 $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$. 则点 A 的坐标为 _____.

12. 直线 $2x + 3y + 6 = 0$ 与坐标轴所围成的三角形的面积为 _____.

13. 抛物线 $y^2 = -8x$ 上到焦点距离等于 6 的点的坐标是 _____.

14. 已知点 $A(2, 0)$, 点 $B(0, 3)$, 点 C 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 当 $\triangle ABC$ 的面积最小时, 点 C 的坐标为 _____.

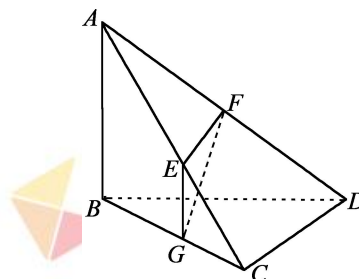
三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. (本小题共 13 分)

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB \perp$ 平面 BCD ， $BC \perp CD$ ， E, F, G 分别是 AC, AD, BC 的中点.

求证：(1) $AB \parallel$ 平面 EFG ；

(2) 平面 $EFG \perp$ 平面 ABC .



16. (本小题共 13 分)

已知斜率为 2 的直线 l 被圆 $x^2 + y^2 + 14y + 24 = 0$ 所截得的弦长为 $4\sqrt{5}$ ，求直线 l 的方程.

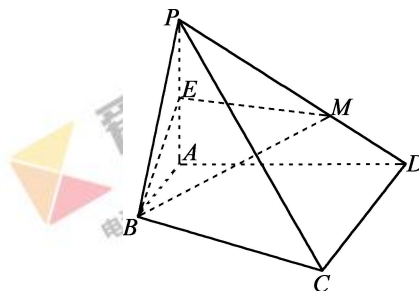
17. (本小题共 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $CD = 2AB$, E 为 PA 的中点, M 在 PD 上 (点 M 与 P , D 两点不重合).

(1) 求证: $AD \perp PB$;

(2) 若 $\frac{PM}{PD} = \lambda$, 则当 λ 为何值时, 平面 $BEM \perp$ 平面 PAB ?

(3) 在 (2) 的条件下, 求证: $PC \parallel$ 平面 BEM .

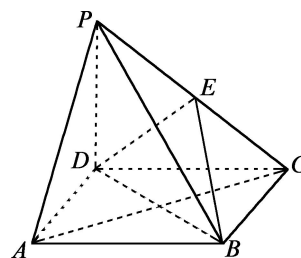


18. (本小题共 13 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 平面 $PCD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD \perp CD$, $PD = CD$, E 为 PC 的中点.

(1) 求证: $AC \perp PB$;

(2) 求二面角 $P-BD-E$ 的余弦值.

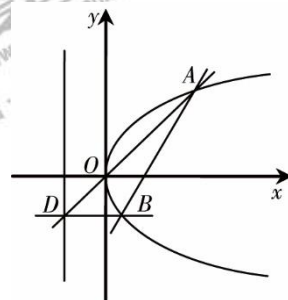


19. (本小题共 14 分)

已知斜率为 1 的直线 l 经过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F , 且与抛物线相交于 A , B 两点, $|AB| = 4$.

(1) 求 p 的值;

(2) 设经过点 B 和抛物线对称轴平行的直线交抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线于点 D , 求证: A , O , D 三点共线 (O 为坐标原点).



20. (本小题共 13 分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 $M(0,1)$ 且与 x 轴平行的直线被椭圆 G 截得的线段长为 $\sqrt{6}$.

(1) 求椭圆 G 的方程;

(2) 设动点 P 在椭圆 G 上 (P 不是顶点), 若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$, 求直线 OP (O 是坐标原点) 的斜率的取值范围.

北京市顺义区 2015-2016 学年上学期期末
高二数学（理科）试卷参考答案

2016.1

一、ABBC BACD

二、9. $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$, $y = \pm 2x$

10. -4

11. $(1, -2, 0)$

12. 3

13. $(-4, \pm 4\sqrt{2})$ 14. $\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

说明：1. 第9题，答对一个空给3分。

2. 每个空正负只写对一个的给2分。

三、

15. 【解析】

(1) 在三棱锥 $A-BCD$ 中， E ， G 分别是 AC ， BC 的中点。所以 $AB \parallel EG$ ，因为 $EG \subset$ 平面 EFG ， $AB \not\subset$ 平面 EFG 所以 $AB \parallel$ 平面 EFG 。(2) 因为 $AB \perp$ 平面 BCD ， $CD \subset$ 平面 BCD 所以 $AB \perp CD$ ，又 $BC \perp CD$ 且 $AB \cap BC = B$ ，所以 $CD \perp$ 平面 ABC ，又 E ， F ，分别是 AC ， AD ，的中点所以， $CD \parallel EF$ ，所以 $EF \perp$ 平面 ABC ，又 $EF \subset$ 平面 EFG ，所以，平面 $EFG \perp$ 平面 ABC 。

16. 【解析】

将圆的方程写成标准形式，得 $x^2 + (y+7)^2 = 25$ ，所以，圆心坐标是 $(0, -7)$ ，半径长 $r = 5$ 。因为直线 l 被圆所截得的弦长是 $4\sqrt{5}$ ，所以，弦心距为 $\sqrt{5^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$ ，即圆心到所求直线 l 的距离为 $\sqrt{5}$ 。因为直线 l 的斜率为 2，所以可设所求直线 l 的方程为 $y = 2x + b$ ，即 $2x - y + b = 0$ 。

所以圆心到直线 l 的距离为 $d = \frac{|7+b|}{\sqrt{5}}$,

因此, $\frac{|7+b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

解得 $b = -2$, 或 $b = -12$.

所以, 所求直线 l 的方程为 $y = 2x - 2$, 或 $y = 2x - 12$.

即 $2x - y - 2 = 0$, 或 $2x - y - 12 = 0$.

17. 【解析】

(1) 证明: 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

所以, $AD \perp$ 平面 PAB .

又 $PB \subset$ 平面 PAB ,

所以, $AD \perp PB$.

(2) 由 (1) 可知, $AD \perp$ 平面 PAB , 又 E 为 PA 的中点,

当 M 为 PD 的中点时, $EM \parallel AD$,

所以, $EM \perp$ 平面 PAB ,

因为 $EM \subset$ 平面 BEM ,

所以, 平面 $BEM \perp$ 平面 PAB .

此时, $\lambda = \frac{1}{2}$.

(3) 设 CD 的中点为 F , 连接 BF , FM .

由 (2) 可知, M 为 PD 的中点.

所以, $FM \parallel PC$,

由题可知 $AB \parallel CD$ 且 $AB = \frac{1}{2}CD$, 即 $AB \parallel FD$, $AB = FD$.

所以 $FM \parallel AB$,

所以 $ABFD$ 为平行四边形.

所以 $AD \parallel BF$.

又 $EM \parallel AD$,

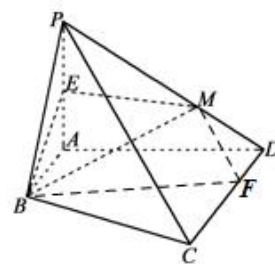
所以, $EM \parallel BF$.

所以, $BEMF$ 共面.

所以, $FM \subset$ 平面 BEM ,

又 $PC \not\subset$ 平面 BEM ,

所以 $PC \parallel$ 平面 BEM .



18. 【解析】

(1) 因为平面 $PCD \perp$ 底面 $ABCD$, PD 垂直于这两个平面的交线 CD .

所以 $PD \perp$ 底面 $ABCD$,

又 $AC \subset$ 底面 $ABCD$,

所以 $PD \perp AC$,

因为底面 $ABCD$ 是正方形

所以 $AC \perp BD$.

又 $PD \cap BD = D$.

所以 $AC \perp$ 平面 PBD .

因为 $PB \subset$ 平面 PBD .

所以, $AC \perp PB$.

(2) 由 (1) 可知 $PD \perp AD$,

由题可知 $PD \perp CD$, $AD \perp CD$.

如图所示建立空间直角坐标系,

点 D 为坐标原点,

设 $DC=1$,

依题意得 $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $P(0,0,1)$,

因为底面 $ABCD$ 是正方形,

所以点 B 的坐标为 $(1,1,0)$

因为, E 为 PC 的中点,

所以, 点 E 的坐标为 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$\overrightarrow{BE} = (-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

令 $z=1$, 得 $x=1$, $y=-1$.

所以, $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

又平面 PBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{CA} = (1, -1, 0)$

所以, $\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CA} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

由题知二面角 $P-BD-E$ 为锐角,

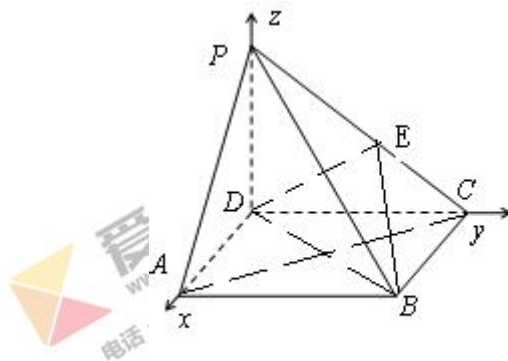
所以二面角 $P-BD-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

19. 【解析】

(1) 由题意可知, 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点坐标为 $F(\frac{p}{2}, 0)$,

准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$.

所以, 直线 l 的方程为 $y = x - \frac{p}{2}$.



$$\text{由} \begin{cases} y = x - \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases} \text{消 } y \text{ 并整理, 得}$$

$$x^2 - 3px + \frac{p^2}{4} = 0.$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2).$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 3p,$$

$$\text{又 } |AB| = |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + p = 4,$$

$$\text{所以, } 3p + p = 4, \quad p = 1.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, 抛物线的方程为 } y^2 = 2x.$$

$$\text{设点 } B \text{ 的坐标为 } \left(\frac{y_0^2}{2}, y_0 \right), \text{ 又焦点 } F\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\text{当 } \frac{y_0^2}{2} \neq \frac{1}{2} \text{ 时, 直线 } AB \text{ 的斜率为 } k = \frac{y_0 - 0}{\frac{y_0^2}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2y_0}{y_0^2 - 1}.$$

$$\text{所以, 直线 } AB \text{ 的方程为 } y - 0 = \frac{2y_0}{y_0^2 - 1} \left(x - \frac{1}{2} \right), \text{ 即 } y = \frac{2y_0}{y_0^2 - 1} x - \frac{y_0}{y_0^2 - 1}$$

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{2y_0}{y_0^2 - 1} x - \frac{y_0}{y_0^2 - 1} \\ y^2 = 2x \end{cases} \text{消 } x \text{ 并整理, 得 } y^2 - \frac{y_0^2 - 1}{y_0} y - 1 = 0$$

$$\text{所以, } y_1 y_2 = -1.$$

$$\text{又 } y_2 = y_0, \text{ 所以, } y_1 = -\frac{1}{y_0}, \quad x_1 = \frac{1}{2y_0^2}, \text{ 即 } A\left(\frac{1}{2y_0^2}, -\frac{1}{y_0}\right).$$

$$\text{由题意可知, 点 } D \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{1}{2}, y_0\right),$$

$$\text{所以, } OA \text{ 的斜率为 } k_{OA} = \frac{-\frac{1}{y_0}}{\frac{1}{2y_0^2}} = -2y_0, \quad OD \text{ 的斜率为 } k_{OD} = \frac{y_0}{-\frac{1}{2}} = -2y_0,$$

$$\text{即 } k_{OA} = k_{OD}$$

$$\text{所以, } A, O, D \text{ 三点共线.}$$

当 $\frac{y_0^2}{2} = \frac{1}{2}$ 时, $|AB| = 2$ 不合题意, 舍去.

20. 解 (1) 由已知, 点 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$ 在椭圆 G 上, 又离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\text{因此 } \begin{cases} \frac{3}{2a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$$

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 由 (1) 可知, 椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. 所以, 点 F 的坐标为 $(-1, 0)$.

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) ($x_0 \neq -1, x_0 \neq 0$), 直线 FP 的斜率为 k ,

则直线 FP 的方程为 $y = k(x+1)$,

$$\text{由方程组 } \begin{cases} y_0 = k(x_0 + 1), \\ \frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y_0, \text{ 并整理得 } 2x_0^2 + 3k^2(x_0 + 1)^2 = 6.$$

又由已知, 得 $k = \sqrt{\frac{6-2x_0^2}{3(x_0+1)^2}} > \sqrt{2}$, 解得 $-\frac{3}{2} < x_0 < -1$ 或 $-1 < x_0 < 0$.

设直线 OP 的斜率为 m , 则直线 OP 的方程为 $y = mx$.

$$\text{由方程组 } \begin{cases} y_0 = mx_0 \\ \frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y_0, \text{ 并整理得 } m^2 = \frac{2}{x_0^2} - \frac{2}{3}.$$

① 当 $x_0 \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ 时, 有 $y_0 = k(x_0 + 1) < 0$, 因此, $m = \frac{y_0}{x_0} > 0$,

于是, $m = \sqrt{\frac{2}{x_0^2} - \frac{2}{3}}$, 得 $m \in \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

② 当 $x_0 \in (-1, 0)$ 时, 有 $y_0 = k(x_0 + 1) > 0$, 因此, $m = \frac{y_0}{x_0} < 0$,

于是, $m = -\sqrt{\frac{2}{x_0^2} - \frac{2}{3}}$, 得 $m \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

综上，直线 OP 的斜率的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.



选填解析

1. 【答案】A

【解析】由直线方程可知 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 。

故选 A.

2. 【答案】B

【解析】与直线 $x + 2y - 3 = 0$ 垂直的直线设为 $2x - y + c = 0$ ，过点 $P(2, -2)$ ，代入得 $4 + 2 + c = 0$ ，解得 $c = -6$ ，所以直线方程为 $2x - y - 6 = 0$ 。

故选 B.

3. 【答案】B

【解析】由三视图可知，该几何体为圆柱，侧面积 $S = 2\pi \times 2 \times h = 12\pi$ ，解得 $h = 3$ ，所以几何体的体积 $V = \pi \times 2^2 \times 3 = 12\pi$ 。

故选 B.

4. 【答案】C

【解析】对于 A，如果线面平行，则线与面内直线要么平行，要么异面；

对于 B，证明面面平行，需要一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行；

对于 D，已知面面垂直，面内与交线垂直的直线才与另一个平面垂直。

故选 C.

5. 【答案】B

【解析】根据两直线平行的关系，可得 $3a^2 - (1 - 2a) = 0$ ，解得 $a = -1$ 或 $a = \frac{1}{3}$ 。

将 $a = -1$ 代入两直线都为 $3x - y + 1 = 0$ ，即两直线重合，故舍去。

故选 B.

6. 【答案】A

【解析】将圆方程化简为 $(x + a)^2 + y^2 = a^2$ ，所以圆心为 $(-a, 0)$ ，半径为 $|a|$ ，所以圆关于 x

轴对称。

故选 A.

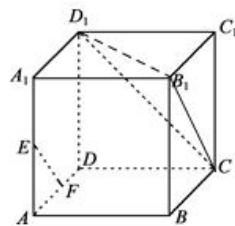
7. 【答案】C

【解析】 E, F 分别是 AA_1, AD 的中点，所以 $EF \parallel A_1D$ ，又正方体中 $B_1C \parallel A_1D$ ，

连结 B_1D_1 ，在 $\triangle D_1BA_1$ 中，三边相等，故夹角为 60° 。

故选 C.

8. 【答案】D



【解析】设直线方程为 $y=k(x+2)$ ，与椭圆方程联立， $(1+2k^2)x^2+8k^2x+4k^2-2=0$ ，计算判别式得 $\Delta=64k^4-4(2k^2+1)(4k^2-2)=-32k^4+8\geq 0$ ，解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq k\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
故选 D.

二、填空题

9. 【答案】 $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$, $y=\pm 2x$

【解析】由双曲线的性质可知， $a^2=4$ ， $b^2=16$ ，解得 $c^2=a^2+b^2=20$ ，所以 $c=2\sqrt{5}$ ，焦点坐标为 $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$ ，渐近线方程为 $y=\pm \frac{b}{a}x=\pm 2x$ 。

故答案为 $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$, $y=\pm 2x$ 。

10. 【答案】 -4

【解析】由 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 可知， $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ，代入得 $2\times(-5)-3y-2=0$ ，解得 $y=-4$ 。

故答案为 -4。

11. 【答案】 $(1, -2, 0)$

【解析】 $\overrightarrow{AB}=(-5, 6, 24)-(m, -2, n)=(-5-m, 8, 24-n)$ ，

由于 $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{a}$ ，所以 $\frac{-5-m}{-3}=\frac{8}{4}=\frac{24-n}{12}$ ，

解得 $m=1$ ， $n=0$ ，所以 A 的坐标为 $(1, -2, 0)$ 。

故答案为 $(1, -2, 0)$ 。

12. 【答案】 3

【解析】当 $x=0$ 时，得 $y=-2$ ，当 $y=0$ 时，得 $x=-3$ ，

所以三角形面积为 $S=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$ 。

故答案为 3。

13. 【答案】 $(-4, \pm 4\sqrt{2})$

【解析】由抛物线的定义可知，到焦点的距离等于到准线的距离，所以该点的横坐标为 -4，代入抛物线解得 $y=\pm 4\sqrt{2}$ 。故点坐标为 $(-4, \pm 4\sqrt{2})$ 。

故答案为 $(-4, \pm 4\sqrt{2})$.

14. 【答案】 $\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

【解析】 $|AB| = \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$,

直线 AB 斜率为 $k_{AB} = \frac{0-3}{2-0} = -\frac{3}{2}$,

解得直线方程为 $y = -\frac{3}{2}(x-2) = -\frac{3}{2}x + 3$, 即 $3x + 2y - 6 = 0$,

设圆心到直线的距离为 d , 则 $d = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$,

圆上的点到 AB 的最小值为 $\frac{6\sqrt{13}}{13} - 1$,

三角形面积最小时, 即为点到直线具体最小时,

设 $C(a, b)$, 代入得 $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \frac{|3a + 2b - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13} - 1 \end{cases}$,

解得点 C 坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.

故答案为 $\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.