

北京市东城区 2015-2016 学年上学期高二年级期末考试
数学试卷（理科）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知 $A(-1, -3)$ ， $B(3, 5)$ 则直线 AB 的斜率为（ ）．

- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 不存在

2. 圆心为 $(-3, 2)$ 且过点 $A(1, -1)$ 的圆的方程是（ ）．

- A. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ B. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$
C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ D. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$

3. 已知直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 互相垂直，则 $m=$ （ ）．

- A. -1 B. $\frac{1}{4}$ C. 1 D. 4

4. 已知 m ， n 表示两条不同直线， α 表示平面，下列说法正确的是（ ）．

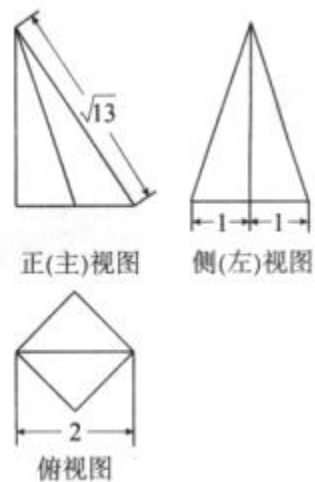
- A. 若 $m//\alpha$ ， $n//\alpha$ ，则 $m//n$ B. 若 $m\perp\alpha$ ， $n\subset\alpha$ ，则 $m\perp n$
C. 若 $m\perp\alpha$ ， $m\perp n$ ，则 $n//\alpha$ D. 若 $m//\alpha$ ， $m\perp n$ ，则 $n\perp\alpha$

5. 双曲线 $2x^2 - y^2 = 8$ 的实轴长是（ ）．

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

6. 一个四棱锥的底面为正方形，其三视图如图所示，则这个四棱锥的体积是（ ）．

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4



7. 在平面直角坐标系 xOy 中， M 为不等式组 $\begin{cases} 2x-y-2\geq 0 \\ x+2y-1\geq 0 \\ 3x+y-8\leq 0 \end{cases}$ ，所表示的区域上一动点，则直线 OM

斜率的最小值为（ ）．

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

- D. 8

- D.** $[0, \frac{\pi}{3}]$

- ### D. 直线

A diagram of a parabolic arch. The arch is represented by a white parabola opening downwards, set against a background of grey bricks. The height of the arch is indicated by a vertical double-headed arrow labeled '2'. The width of the arch at its base is indicated by a horizontal double-headed arrow labeled '4'. The left side of the arch is labeled with the letter 'n'.

-

17. (本小题满分 10 分)

(I) 求证: $CD \parallel$ 平面 PAB ;

18. (本小题满分 10 分)

已知圆 C 经过 $A(1,3)$, $B(-1,1)$ 两点, 且圆心在直线 $y=x$ 上.

(I) 求圆 C 的方程;

(II) 设直线 l 经过点 $(2,-2)$, 且 l 与圆 C 相交所得弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.



19. (本小题满分 10 分)

已知平行四边形的两条边所在直线的方程分别为 $x + y - 1 = 0$, $3x - y + 4 = 0$, 且它的对角线的交点为 $M(3,3)$, 求这个平行四边形其他两边所在直线的方程.

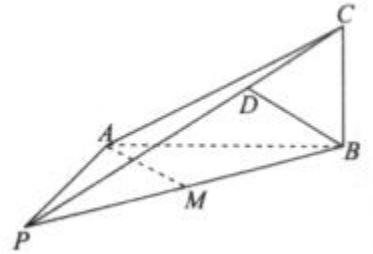
20. (本小题满分 11 分)

如图, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $AB = PA = 2BC = 2$, M 为 PB 的中点.

(I) 求证: $AM \perp$ 平面 PBC ;

(II) 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值;

(III) 证明：在线段 PC 上存在点 D ，使得 $BD \perp AC$ ，并求 $\frac{PD}{PC}$ 的值.



21. (本小题满分 11 分)

已知椭圆的中心在坐标原点 O ，焦点在 x 轴上，短轴长为 2，且两个焦点和短轴的两个端点恰为一个正方形的顶点，过右焦点 F 与 x 轴不垂直的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 当直线 l 的斜率为 1 时，求 $\triangle POQ$ 的面积;

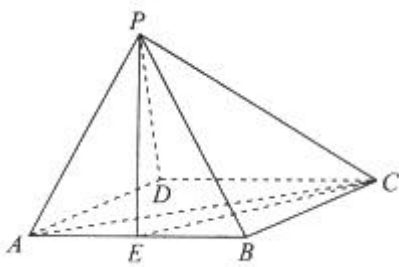
(III) 在线段 OF 上是否存在点 $M(m, 0)$ ，使得以 MP, MQ 为邻边的平行四边形是菱形？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

一、选择题

- ## 二、填空题

- ### 三、解答题

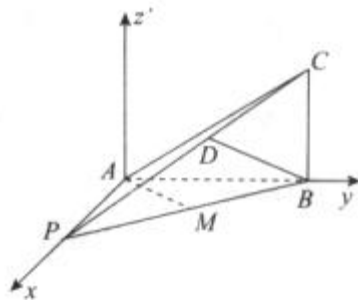
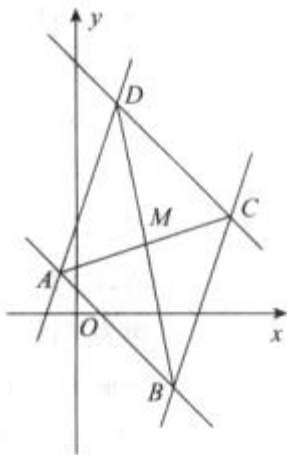
所以 $PE \perp AD$.



- 综上，直线 l 的方程为 $x-2=0$ 或 $4x+3y-2=0$.

19. 解：联立两条直线的方程，得到方程组

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases},$$



所以 $\vec{n} = (0, 1, -2)$.

由 (I) 可知 $\overrightarrow{AM} = (1, 1, 0)$ 为平面 BPC 的法向量,

设 \vec{n} , \vec{AM} 的夹角为 α , 则 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(II) 设 $D(u, v, w)$ 是线段 PC 上一点, 且 $\overrightarrow{PD} = \lambda \overrightarrow{PC} (0 \leq \lambda \leq 1)$,

所以 $\overrightarrow{BD} = (2 - 2\lambda, 2\lambda - 2, \lambda)$,

由 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，得 $\lambda = \frac{4}{5}$ 。

因为 $\frac{4}{5} \in [0, 1]$ ，所以在线段 PC 上存在点 D ，使得 $BD \perp AC$ ，

此时, $\frac{PD}{PC} = \lambda = \frac{4}{5}$.

21. 解: (I) 由已知, 椭圆方程可设为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

所以 $b=c=1$, $a=\sqrt{2}$

所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(II) 因为直线 l 过椭圆右焦点 $F(1,0)$, 且斜率为 1, 所以直线 l 的方程为 $y=x-1$.

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$, $3y^2 + 2y - 1 = 0$, 解得 $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

所以 $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} |y_1 - y_2| = \frac{2}{3}$.

所以设直线 l 的方程为 $y = k(x-1)(k \neq 0)$.

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ y = k(x-1) \end{cases}$, 得 $(1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$,

因为 $\Delta = 16k^4 - 4(1 + 2k^2)(2k^2 - 2) = 8(k^2 + 1) > 0$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1+2k^2}$

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, PQ 点为 $N(x_0, y_0)$,

所以 $x_0 = \frac{2k^2}{1+2k^2}$, $y_0 = \frac{-k}{1+2k^2}$

因为以 MP , MQ 为邻边的平行四边形是菱形,

所以 $MN \perp PQ$, $k_{MN} \cdot k = -1$,

所以 $k_{MN} \cdot k = \frac{\frac{-k}{1+2k^2}}{\frac{2k^2}{1+2k^2} - m} \cdot k = -1$,

整理得 $\frac{-k^2}{1+2k^2} = -\frac{2k^2}{1+2k^2} + m$,

$m = \frac{-k^2 + 2k^2}{1+2k^2} = \frac{k^2}{1+2k^2}$.

所以 $m = \frac{k^2}{1+2k^2} (k \neq 0)$,

所以 $0 < m < \frac{1}{2}$.

选填解析

一、 选择题

1. 【答案】A

【解析】直线 AB 的斜率 $k = \frac{5 - (-3)}{3 - (-1)} = 2$.

故选 A.

2. 【答案】D

【解析】 \because 圆心为 $(-3, 2)$ 且过点 $A(1, -1)$,

\therefore 圆的半径 $r = \sqrt{(-3-1)^2 + (2+1)^2} = 5$,

则圆的方程为 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$.

故选 D.

3. 【答案】C

【解析】 \because 直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 互相垂直,

$\therefore 1 \times 2 + (-2)m = 0$, 解得 $m = 1$.

故选 C.

4. 【答案】B

【解析】A. 若 $m // \alpha$, $n // \alpha$, 则 m 与 n 相交、平行或异面, 故 A 错;

B. 若 $m \perp \alpha$, $n \subset \alpha$, 则由线面垂直的性质得 $m \perp n$, 故 B 正确;

C. 若 $m \perp \alpha$, $m \perp n$, 则 $n // \alpha$ 或 $n \subset \alpha$, 故 C 错;

D. 若 $m // \alpha$, $m \perp n$, 则 n 与 α 相交、平行或 $n \subset \alpha$, 故 D 错.

故选 B.

5. 【答案】C

【解析】双曲线 $2x^2 - y^2 = 8$, 可化为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$,

$\therefore a = 2$,

\therefore 双曲线 $2x^2 - y^2 = 8$ 的实轴长是 4.

故选 C.

6. 【答案】B

【解析】由题设及图知, 此几何体为一个四棱锥,

故其底面积为 $4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 2$,

其相对的侧棱与高及底面正方形的对角线组成一个直角三角形

由于此侧棱长为 $\sqrt{13}$ ，对角线长为2，故棱锥的高为 $\sqrt{(\sqrt{13})^2 - 2^2} = 3$ ，

此棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$.

故答案为 B.

【解析】由约束条件
$$\begin{cases} 2x - y - 2 \geq 0 \\ x + 2y - 1 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$$
 作出可行域如图，

联立 $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3x+y-8=0 \end{cases}$, 解得 $M(3,-1)$,

\therefore 直线 OM 斜率的最小值为 $k = -\frac{1}{3}$.

【解析】抛物线 $C: y^2 = x$ 的焦点为 $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$,

$\because A(x_0, y_0)$ 是 C 上一点, $|AF| = \frac{5}{4}x_0$,

$$\therefore \frac{5}{4}x_0 = x_0 + \frac{1}{4},$$

解得 $x_0 = 1$.

故答案选 A.

【解析】 由题意可得点 $P(-\sqrt{3}, -1)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的外部,

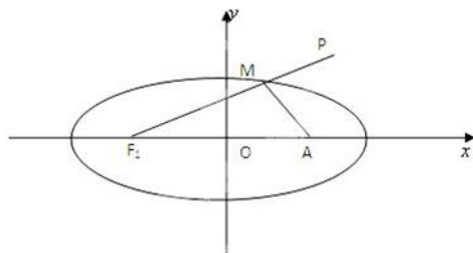
故要求的直线的斜率一定存在，设为 k ，

则直线方程为 $y+1=k(x+\sqrt{3})$ ，即 $kx-y+\sqrt{3}k-1=0$ 。

故答案选 D.

10. 【答案】D

【解析】如图， A 点为定圆的圆心，动点 M 为定圆半径 AP 的中点，故 $AM = MP$ ，
此时 M 的轨迹为以 A 为圆心，半径为 AM 的圆。



如图，以 F_1 为定圆的圆心， F_1P 为其半径，

在 F_1P 截得 $|MP| = |MA|$,

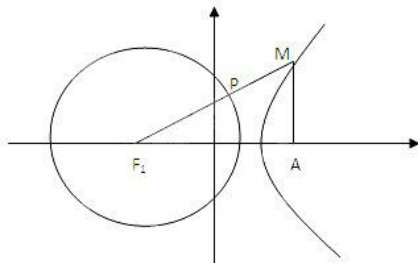
设 $|PF_1| = r$, $\therefore |MF_1| + |PM| = |MF_1| + |MA| = r > |F_1A|$,

由椭圆的定义可知, M 的轨迹是以 F_1 、 A 为焦点,

以 $|F_1A|$ 为焦距, 以 r 为长轴的椭圆.

如图，以 F_1 为定圆的圆心， F_1P 为其半径，

过 P 点延长使得 $|MP| = |MA|$,



则有 $|MF_1| - |PM| = r$, $\therefore |MF_1| - |MA| = r < |FA|$,

由双曲线的定义可知, M 的轨迹是以 F_1 , A 为焦点的双曲线的右支.

若 M 落在以 A 为端点在 x 轴上的射线上，
也满足条件，此时轨迹为一条射线，不是直线.

故答案选 D.

二、 填空题

11. 【答案】 $y = \pm \frac{3}{4}x$

【解析】 \because 双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的 $a=4$ ， $b=3$ ，焦点在 x 轴上，

而双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

故答案为 $y = \pm \frac{3}{4}x$.

【解析】 \because 等腰直角三角形的斜边长为 $\sqrt{2}$ ， \therefore 圆锥的母线 $l=\sqrt{2}$.

故答案为 $\sqrt{2}\pi$.

【解析】 $\because \vec{a} = (1, 1, 0), \vec{b} = (-1, 0, 2),$

$$\therefore |2a - b| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}.$$

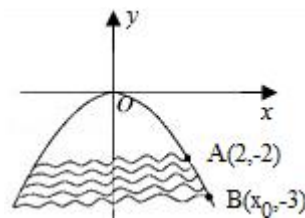
故答案为 $\sqrt{17}$

【解析】如图建立直角坐标系，设抛物线方程为 $x^2 = my$ ，

得 $m = -2$,

$$\therefore x^2 = -2y, \text{ 代入 } B(x_0, -3) \text{ 得 } x_0 = \sqrt{6},$$

故答案为 $2\sqrt{6}$.



【解析】 设 $x = \frac{3}{2}a$ 交 x 轴于点 M ，

$$A_1O = \sqrt{A_1M^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$A_1M = A_1N = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

所以线段 A_1P 长度的取值范围是 $[\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.

故答案为 $[\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.