

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

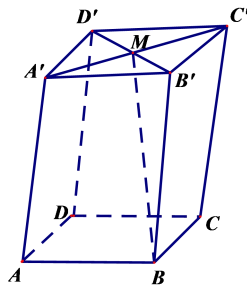
A. 2 B. 4 C. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

A. $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c$

B. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c$

C. $-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + c$

D. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + c$



A. 圆 B. 抛物线 C. 椭圆 D. 双曲线

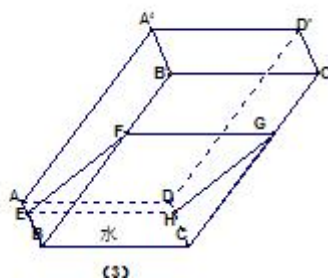
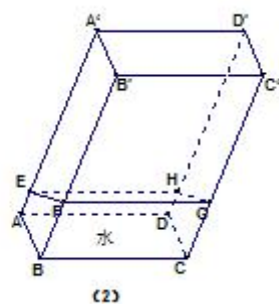
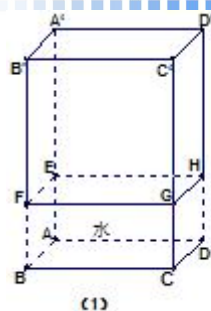
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(12) 已知空间向量 $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$, 那么 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____.

(13) 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点坐标是 _____；焦点到渐近线的距离为 _____.

A diagram of a semi-elliptical arch. The arch is shown in cross-section, with a height of 2 and a width of 4. The arch is supported by a base that is 4 units wide. The height of the arch is indicated by a vertical double-headed arrow labeled 2. The width of the arch is indicated by a horizontal double-headed arrow labeled 4.

其中正确命题的序号是_____.



(16) 已知曲线 $C: |x| + |y| = m$ ($m > 0$).

(1) 若 $m = 1$, 则由曲线 C 围成的图形的面积是_____.

(2) 曲线 C 与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有四个不同的交点, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(17) (本小题 14 分)

已知抛物线 $y^2 = 4x$ 与直线 $y = x - 1$ 交于 A, B 两点,

(I) 求该抛物线的焦点坐标及准线方程;

(II) 求线段 AB 的长.



(18) (本小题 14 分)

已知圆 C 与 x 轴的交点分别为 $A(-1,0)$ ， $B(3,0)$ ，且圆心在直线 $2x - y = 0$ 上.

(I) 求圆 C 的标准方程;

(II) 求与圆 C 相切于点 $B(3,0)$ 的切线方程;

(III) 若圆 C 与直线 $y = x + m$ 有公共点，求实数 m 的取值范围.

(19) (本小题 14 分)

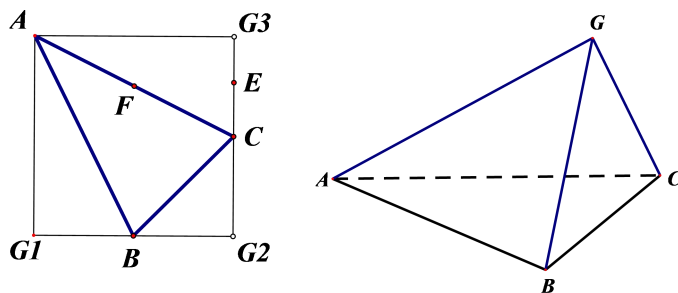
如图，在正方形 $AG_1G_2G_3$ 中，点 B ， C 分别是 G_1G_2 ， G_2G_3 的中点，点 E ， F 分别是 G_3C ， AC 的中点，

现在沿 AB ， BC 及 AC 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1 ， G_2 ， G_3 三点重合，重合后记为 G 。

(I) 判断在四面体 $GABC$ 的四个面中，哪些面的三角形是直角三角形，若是直角三角形，写出其直角（只需写出结论）；

(II) 求证： $AG \perp BC$

(III) 请在四面体 $GABC$ 的直观图中标出点 E ， F ，求证：平面 $EFB \perp$ 平面 GBC 。



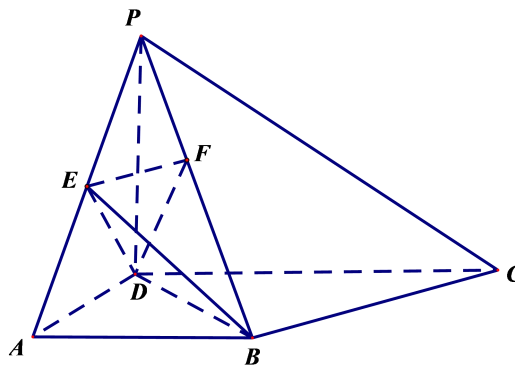
(20) (本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \parallel CD$ ， $PD = AD = AB = 1$ ， $CD = 2$ ，点 E 是 PA 的中点，作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F 。

(I) 求证： $PB \perp$ 平面 DEF ；

(II) 求二面角 $E-PB-D$ 的大小；

(III) 在 DC 上是否存在一点 G ，使 $PG \parallel$ 平面 EDB ，若存在，求出 DG 的长；若不存在，说明理由。



(21) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的长轴长为 4, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 试判断命题“若过点 $M(1, 0)$ 的动直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 则在直角坐标平面上存在定点 N , 使得以线段 AB 为直径的圆恒过点 N ”的真假, 若为真命题, 求出定点 N 的坐标; 若为假命题, 请说明理由.

大兴区 2015 ~ 2016 学年度第一学期期末检测试卷

高二数学 (理) 参考答案及评分标准

第一部分 (选择题 共 50 分)

一、 选择题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	C	C	B	A	B	D	A	D

第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 \leq 0$ (12) $-\frac{4}{5}$

(13) $(2, 0); \sqrt{3}$ (14) $2\sqrt{5}$

(15) ①②④ (16) 2; $2 < m < 3$, 或 $m = \sqrt{13}$

注: 第 15 题只写 2 个答案且都是正确答案得 3 分.

第 13, 16 题第一个空填对得 2 分, 第二个空填对得 3 分.

第 16 题第二个空只写一部分答案且正确得 1 分.

三、解答题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(17) (本小题 14 分)

解: (I) 抛物线的焦点坐标为 $(1, 0)$,

准线方程为 $x = -1$.

(II) 由方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x - 1 \end{cases}$,

可得 $x^2 - 6x + 1 = 0$,

由求根公式得 $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 x_2 = 1$,

法一:

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + [(x_1 - 1) - (x_2 - 1)]^2} = \sqrt{2} |x_1 - x_2|$$

$$= \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} = 8.$$

法二:

直线 $y = x - 1$ 过焦点, A , B 到准线的距离分别为 d_A , d_B .

由抛物线定义可知 $|AB| = |AF| + |BF| = d_1 + d_2 = x_1 + x_2 + 2$,

于是 $|AB| = 6 + 2 = 8$.

(18) (本小题 14 分)

解: (I) 因为圆 C 的圆心在直线 $2x - y = 0$ 上, 所以设圆心 $C(a, 2a)$.

又因为圆 C 与 x 轴的交点分别为 $A(-1,0)$, $B(3,0)$, 所以 $a=1$

故圆心 $C(1,2)$ ，半径为 $2\sqrt{2}$ ，

圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$.

(II) 因为 CB 与切线垂直, 所以 $k_{BC} \cdot k = -1$,

因为 $k_{BC} = \frac{2-0}{1-3} = -1$, 所以 $k=1$,

故与圆 C 相切于点 $B(3,0)$ 的切线方程为: $x-y-3=0$.

(III) 圆 C 与直线 $y = x + m$ 有公共点,

即圆 C 的圆心到直线的距离 $d \leq r$,

即 $\frac{|1-2+m|}{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2}$,

解得 $-3 \leq m \leq 5$,

所以 圆 C 与直线 $y = x + m$ 有公共点, 则 $-3 \leq m \leq 5$.

(19) (本小题 14 分)

解: (I) 在正方形 $AG_1G_2G_3$ 中, $\angle G_1$, $\angle G_2$, $\angle G_3$ 都是直角.

沿 AB ， BC 及 AC 把这个正方形折成四面体 $GABC$ 后，此三个角度数不变.

即在四面体 $GABC$ 的四个面中,

在 $\triangle AGB$ 中, $\angle AGB = 90^\circ$,

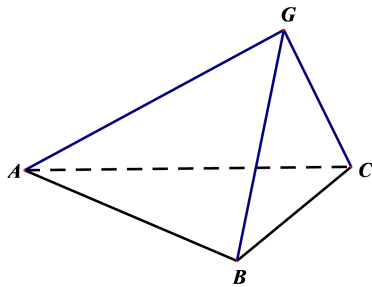
在 $\triangle AGC$ 中, $\angle AGC = 90^\circ$,

在 $\triangle BGC$ 中, $\angle BGC = 90^\circ$,

$\triangle ABC$ 不是直角三角形.

故分别在平面 AGB ，平面 AGC 和平面 BGC 的三角形是直角三角

形.



(II)证明: 在四面体 $GABC$ 中, $\angle AGB = 90^\circ$, $\angle AGC = 90^\circ$,

即 $AG \perp GB$, $AG \perp GC$,

因为在平面 BGC 中, $GB \perp GC = G$,

所以, $AG \perp$ 平面 BGC .

因为 $BC \subset \text{平面 } BGC$,

所以, $AG \perp BC$.

(III) 在四面体 $GABC$ 的直观图中标出点 E , F ,

证明：因为在 $\triangle AGC$ 中，点 E ， F 分别是 GC ， AC 的中点，

所以 $EF \parallel AG$,

由 (II) 已证 $AG \perp$ 平面 BGC ,

故 $EF \perp$ 平面 BGC ,

因为 $EF \subset \text{平面 } EFB$,
所以平面 $EFB \perp \text{平面 } GBC$.

(20) (本小题 14 分)

解: (I) 证明: 因为 $PD \perp \text{底面 } ABCD$, $DA \subset \text{面 } ABCD$, $DC \subset \text{面 } ABCD$,

所以 $PD \perp DA$, $PD \perp DC$.

又因为四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel CD$, $AB = 1$, $CD = 2$,

所以 $AD \perp DC$

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $E(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $P(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$,

$\vec{DE} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $\vec{PB} = (1, 1, -1)$,

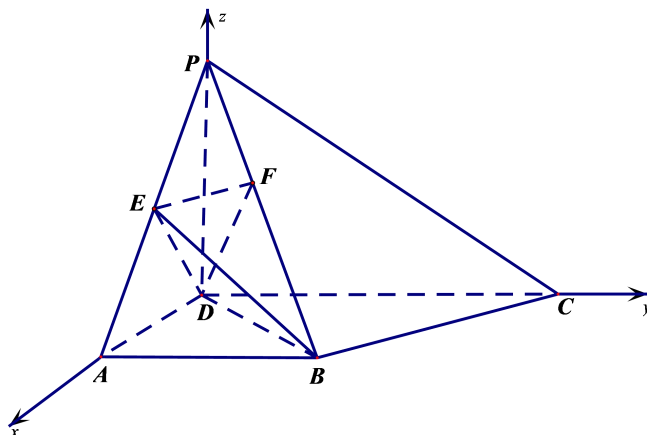
因为 $\vec{DE} \cdot \vec{PB} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 - 1 \times \frac{1}{2} = 0$,

所以 $DE \perp PB$,

又因为已知 $EF \perp PB$,

在平面 DEF 中, $DE \cap EF = E$,

所以 $PB \perp \text{平面 } DEF$.



(II) 由 (I) 已证 $PB \perp \text{平面 } DEF$,

因为 $DF \subset \text{面 } DEF$,

所以 $DF \perp PB$,

已知 $EF \perp PB$,

故 $\angle EFD$ 是二面角 $E-PB-D$ 的平面角.

设点 $F(x, y, z)$, 则 $\vec{PF} = (x, y, z-1)$

因为 $\vec{PF} = k\vec{PB}$

所以 $(x, y, z-1) = k(1, 1, -1) = (k, k, -k)$

即 $x = k, y = k, z = 1 - k$, $F(k, k, 1 - k)$

$\vec{FE} = (\frac{1}{2} - k, -k, k - \frac{1}{2})$

因为 $EF \perp PB$

所以 $\vec{EF} \cdot \vec{PB} = 0$

所以 $(1, 1, -1) \cdot (\frac{1}{2} - k, -k, k - \frac{1}{2}) = -k + \frac{1}{2} - k - k + \frac{1}{2} = -3k + 1 = 0 \Rightarrow 0$

所以 $k = \frac{1}{3}$, 点 $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$,

又因为点 $E(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$,

所以 $\vec{FE} = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$,

$$\text{因为 } \cos \angle EFD = \frac{\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FE}| \cdot |\overrightarrow{FD}|} = \frac{(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}) \cdot (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})}{\frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{2},$$

所以 $\angle EFD = 60^\circ$,

由题知二面角 $E-PB-D$ 的平面角为锐角, 所以二面角 $E-PB-D$ 的大小为 60° .

(III) 当 DC 的中点为点 G 时, 满足 $PG \parallel$ 平面 EDB .

因为底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel CD$, $AB = AD = 1$, $CD = 2$,

所以 $DG = 1$, 且四边形 $ABGD$ 为正方形.

连接 AG 交 DB 于 O , 则 O 为 AG 中点. 连接 EO ,

所以在 $\triangle PAG$ 中, 点 E , O 分别是 PA , AG 的中点,

所以 $EO \parallel PG$,

因为 $EO \subset$ 平面 EDB ,

$PG \not\subset$ 平面 EDB ,

所以 $PG \parallel$ 平面 EDB , 且 $DG = 1$.

(21) (本小题 14 分)

解: (I) 因为长轴长为 4, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,

$$\text{所以 } 2a = 4, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } c = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{又因为 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 所以 } b^2 = \frac{4}{3},$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程 } \frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = 1.$$

(II) 真命题.

由椭圆的对称性知, 点 N 在 x 轴上, 设 $N(t, 0)$,

①当直线 AB 的斜率存在时, 设其方程为 $y = k(x-1)$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x-1), \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases} \text{ 得 } (1+3k^2)x^2 - 6k^2x + 3k^2 - 4 = 0.$$

$$\text{所以 } \Delta = 4(9k^2 + 4) > 0,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{6k^2}{1+3k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{3k^2 - 4}{1+3k^2},$$

因为以线段 AB 为直径的圆过点 N ,

所以 $AN \perp BN$,

$$\text{所以 } \frac{y_1}{x_1 - t} \times \frac{y_2}{x_2 - t} = -1,$$

则 $(x_1 - t)(x_2 - t) + y_1 y_2 = 0$,

所以 $(x_1 - t)(x_2 - t) + k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0$,

所以 $(1 + k^2)x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(-k^2 - t) + t^2 + k^2 = 0$,

$$(1 + k^2) \frac{3k^2 - 4}{1 + 3k^2} + \frac{6k^2}{1 + 3k^2}(-k^2 - t) + t^2 + k^2 = 0 ,$$

$$-4 - 6tk^2 + t^2 + 3t^2 k^2 = 0 ,$$

$$3tk^2(t - 2) + (t^2 - 4) = 0 ,$$

$$(t - 2)(3tk^2 + t + 2) = 0 ,$$

所以若以线段 AB 为直径的圆恒过点 $N(t, 0)$,

则 $t - 2 = 0$, 即 $t = 2$,

所以当直线 AB 的斜率存在时, 存在 $N(2, 0)$ 使命题是真命题;

②当直线 AB 的斜率不存在时, 其方程为 $x = 1$.

$A(1, 1)$, $B(1, -1)$

以线段 AB 为直径的圆的方程为 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$,

因为 $N(2, 0)$ 满足方程 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$,

所以当直线 AB 的斜率不存在时, 点 $N(2, 0)$ 也能使命题是真命题.

综上①②知, 存在点 $N(2, 0)$, 使命题是真命题.

一、 选择题

1. 【答案】D

【解析】 $\because p$ 是假命题, q 是真命题,

$\therefore p \wedge q$ 是假命题, 选项 A 错误;

$p \vee q$ 是真命题, 选项 B 错误;

$\neg p$ 是真命题, 选项 C 错误;

$\neg q$ 是假命题, 选项 D 正确.

故选 D.

2. 【答案】B

【解析】如图所示,

连接 CD' , AC . 由正方体的性质可得 $A'B \parallel D'C$.

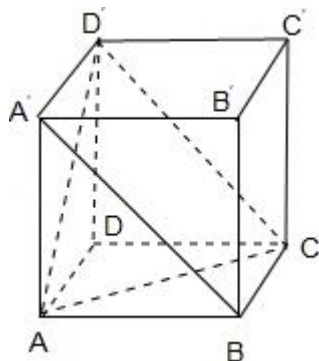
$\therefore \angle AD'C$ 或其补角即为异面直线 $A'B$ 与 AD' 所成的角.

由正方体可得: $AD' = D'C = AC$, $\therefore \triangle AD'C$ 是等边三角形.

$\therefore \angle AD'C = 60^\circ$.

\therefore 异面直线 $A'B$ 与 AD' 所成的角为 60° .

故选 B.



3. 【答案】C

【解析】若“ $A=3$ ”成立,

则两直线的方程分别是 $3x-2y-1=0$ 与 $6x-4y+C=0$,

当 $C=-1$ 时, 两直线重合,

所以两直线不一定平行;

反之, 当“直线 $Ax-2y-1=0$ 与直线 $6x-4y+C=0$ 平行”成立时,

有 $\frac{A}{6} = \frac{2}{4} \neq \frac{-1}{C}$, 所以 $A=3$;

所以“ $A=3$ ”是“直线 $Ax-2y-1=0$ 与直线 $6x-4y+C=0$ 平行”的必要不充分条件.

故选 C.

4. 【答案】C

【解析】根据几何体的三视图,

得该几何体是底面直径为 2, 高为 2 的圆柱,

所以它的侧面积是 $2\pi \times \frac{2}{2} \times 2 = 4\pi$.

故选 C.

5. 【答案】B

【解析】 \because 已知 $O(0,0)$ 关于直线 l 的对称点为 $A(-4,2)$,

故直线 l 为线段 OA 的中垂线.



故选 B.

故答案为 A.

故答案选 B

故答案选 D

$$= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c.$$

故答案选 A.

10. 【答案】D

【解析】设 a 到平面 α 的距离为 d ，在平面 α 内的射影为 l ，
则在平面 α 内以 b 为 x 轴， l 为 y 轴建立坐标系，

设点 $P(x, y)$ ，

\because 平面 α 内到直线 a 和直线 b 距离相等，

$$\therefore |y| = \sqrt{x^2 + d^2},$$

$$\therefore y^2 - x^2 = d^2,$$

\therefore 点 P 的轨迹为双曲线.

故答案选 D.

二、 填空题

11. 【答案】 $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 \leq 0$

【解析】 \because 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$ ”

\therefore “任意”的否定为“存在”

\therefore 命题的否定为： $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$.

故答案为 $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 \leq 0$.

12. 【答案】 $-\frac{4}{5}$

$$\text{【解析】} \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-4 + 0 + 0}{\sqrt{4 + 0 + 1} \cdot \sqrt{4 + 1 + 0}} = -\frac{4}{5}.$$

故答案为 $-\frac{4}{5}$

13. 【答案】 $(2, 0); \sqrt{3}$

【解析】双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ，

$$\therefore a^2 = 1, b^2 = 3,$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 4,$$

$$\therefore c = 2,$$

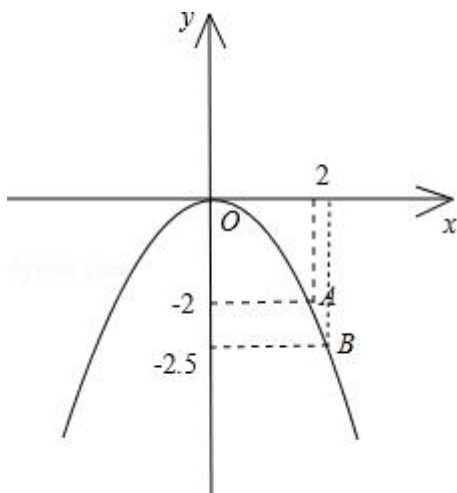
\because 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点在 x 轴上，

\therefore 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点坐标是 $(2, 0)$ ，



∴ 焦点到渐近线的距离 $d = \frac{|\pm 2\sqrt{3} + 0|}{2} = \sqrt{3}$.

14. 【答案】 $2\sqrt{5}$



16. 【答案】 2； $2 < m < 3$ ，或 $m = \sqrt{13}$

【解析】(1) 若 $m=1$ ，曲线 $C:|x|+|y|=1$ ，表示对角线长为 2 的正方形，
则由曲线 C 围成的图形的面积是 2；

(2) 椭圆的长半轴长为 3，短半轴长为 2，

$2 < m < 3$ 时，曲线 C 与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有四个不同的交点；

$x > 0$ ， $y > 0$ ， $x + y - m = 0$ 与椭圆方程联立，可得 $13x^2 - 18mx + 9m^2 - 36 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = (-18m)^2 - 52(9m^2 - 36) = 0,$$

$\because m > 0$ ， $\therefore m = \sqrt{13}$ 。此时曲线 C 与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有四个不同的交点。

故答案为 2； $2 < m < 3$ ，或 $m = \sqrt{13}$