

北京市朝阳区 2015-2016 学年高二上学期期末

数学理科试卷

2016.1

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

(1) 圆  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  被直线  $x=1$  截得的弦长为 ( ).

A. 1

B.  $\sqrt{3}$

C. 2

D.  $2\sqrt{3}$

(2) 抛物线  $y^2 = 2x$  上与其焦点距离等于 3 的点的横坐标是 ( ).

A. 1

B. 2

C.  $\frac{5}{2}$

D.  $\frac{7}{2}$

(3) 已知  $p: "x > 2"$ ,  $q: "x^2 > 4"$ , 则  $p$  是  $q$  的 ( ).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

(4) 已知两条不同的直线  $a, b$ , 三个不同的平面  $\alpha, \beta, \gamma$ , 下列说法正确的是 ( ).

A. 若  $a // \alpha$ ,  $b \perp a$ , 则  $b // \alpha$

B. 若  $a // \alpha$ ,  $a // \beta$ , 则  $\alpha // \beta$

C. 若  $\alpha \perp \beta$ ,  $a \perp \alpha$ , 则  $a // \beta$

D. 若  $\alpha \perp \gamma$ ,  $\beta // \gamma$ , 则  $\alpha \perp \beta$

(5) 在圆  $x^2 + y^2 = 16$  上任取一点  $P$ , 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线段  $PD$ ,  $D$  为垂足, 当点  $P$  在圆上运动时, 线段  $PD$  的中点  $M$  的轨迹方程是 ( ).

A.  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

B.  $x^2 + y^2 = 4$

C.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

D.  $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$

(6) 如图, 平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AC$  与  $BD$  的交点为  $M$ , 设  $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{A_1A} = \vec{c}$ ,

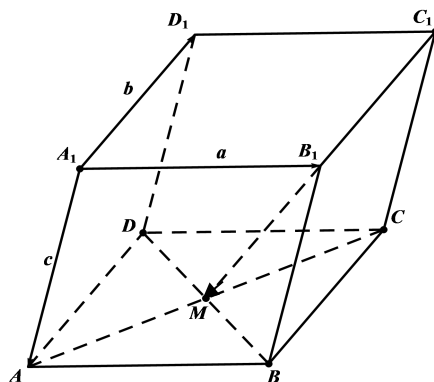
则下列向量中与  $\overrightarrow{B_1M}$  相等的向量是 ( ).

A.  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

B.  $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

C.  $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

D.  $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$



(7) 若由方程  $x^2 - y^2 = 0$  和  $x^2 + (y-b)^2 = 2$  所组成的方程组至多有两组不同的实数解, 则实数  $b$  的取值范围是 ( ).

A.  $b \geq 2\sqrt{2}$  或  $b \leq -2\sqrt{2}$

B.  $b \geq 2$  或  $b \leq -2$

C.  $-2 \leq b \leq 2$

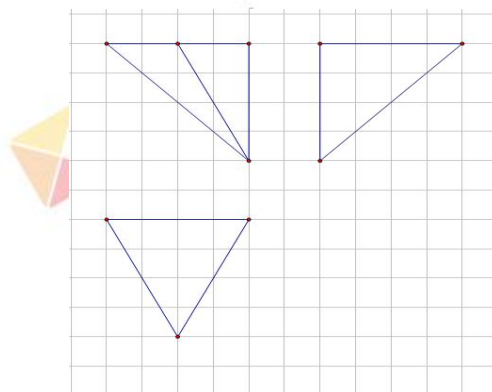
D.  $-2\sqrt{2} \leq b \leq 2\sqrt{2}$

(8) 设  $O$  是坐标原点, 若直线  $l: y = x + b$  ( $b > 0$ ) 与圆  $x^2 + y^2 = 4$  交于不同的两点  $P_1, P_2$ , 且  $|\overrightarrow{P_1P_2}| \geq |\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}|$ , 则实数  $b$  的最大值是 ( ).

- A.  $\sqrt{2}$       B. 2      C.  $\sqrt{6}$       D.  $2\sqrt{2}$

(9) 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某三棱锥的三视图, 则该三棱锥的体积为 ( ).

- A.  $\frac{16}{3}$       B.  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$   
C.  $\frac{32}{3}$       D.  $\frac{64}{3}$



(10) 已知动圆  $C$  位于抛物线  $x^2 = 4y$  的内部 ( $x^2 < 4y$ ), 且过该抛物线的顶点, 则动圆  $C$  的周长的最大值是 ( ).

- A.  $\pi$       B.  $2\pi$       C.  $4\pi$       D.  $16\pi$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请把正确答案填在答题卡上)

(11) 写出命题  $p$ : “任意两个等腰直角三角形都是相似的” 的否定  $\neg p$ : \_\_\_\_\_;

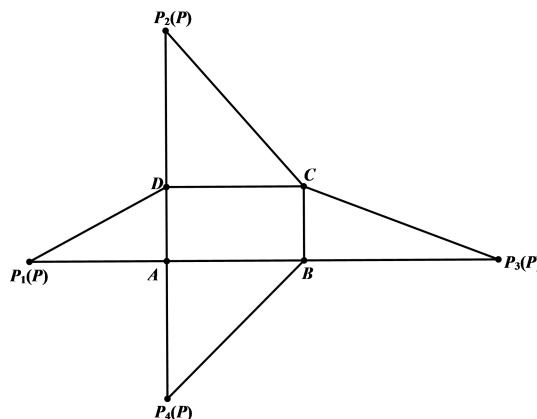
判断  $\neg p$  是 \_\_\_\_\_ 命题. (后一空中填 “真” 或 “假”)

(12) 已知  $A(8,0)$ ,  $B(0,6)$ ,  $O(0,0)$ , 则  $\triangle AOB$  的外接圆的方程是 \_\_\_\_\_.

(13) 中心在原点, 焦点在  $y$  轴上, 虚轴长为  $4\sqrt{2}$  并且离心率为 3 的双曲线的渐近线方程为 \_\_\_\_\_.

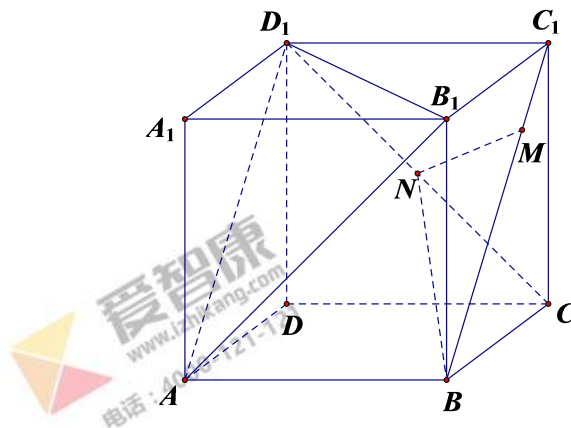
(14) 过椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点  $F_2$  的直线与椭圆  $C$  相交于  $A, B$  两点. 若  $\overrightarrow{AF_2} = \overrightarrow{F_2B}$ , 则点  $A$  与左焦点  $F_1$  的距离  $|AF_1| =$  \_\_\_\_\_.

(15) 下图为四棱锥  $P-ABCD$  的表面展开图, 四边形  $ABCD$  为矩形,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AD = 1$ . 已知顶点  $P$  在底面  $ABCD$  上的射影为点  $A$ , 四棱锥的高为  $\sqrt{2}$ , 则在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PC$  与平面  $ABCD$  所成角的正切值为 \_\_\_\_\_.



(16) 如图，正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为1， $N$  为  $CD_1$  中点， $M$  为线段  $BC_1$  上的动点，（ $M$  不与  $B$ ， $C_1$  重合）有四个命题：

- ①  $CD_1 \perp$  平面  $BMN$ ；
  - ②  $MN \parallel$  平面  $AB_1D_1$ ；
  - ③ 平面  $AA_1CC_1 \perp$  平面  $BMN$ ；
  - ④ 三棱锥  $D-MNC$  的体积有最大值.
- 其中真命题的序号是\_\_\_\_\_.



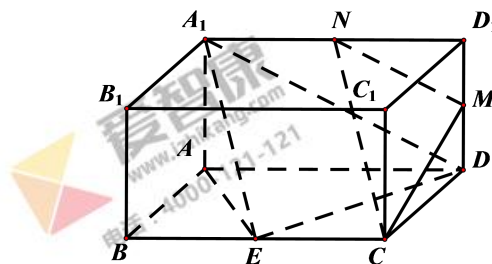
三、解答题（本大题共3小题，共40分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.请写在答题卡上）

(17) （本题满分12分）

如图，长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AA_1 = AB = 1$ ， $AD = 2$ ， $E$  为  $BC$  的中点，点  $M$ ， $N$  分别为棱  $DD_1$ ， $A_1D_1$  的中点.

(I) 求证：平面  $CMN \parallel$  平面  $A_1DE$ ；

(II) 求证：平面  $A_1DE \perp$  平面  $A_1AE$  .



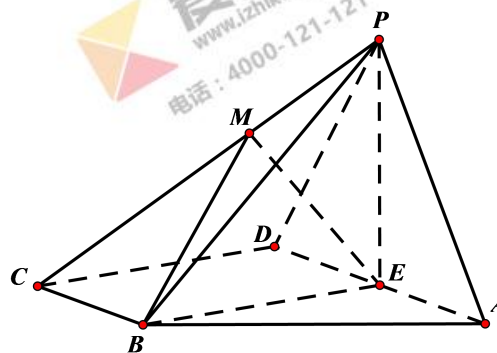
(18) (本题满分 14 分)

如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为直角梯形， $AD \parallel BC$ ，且  $BC = \frac{1}{2}AD = 1$ ， $BC \perp DC$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，平面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ， $E$  为  $AD$  的中点， $\triangle PAD$  为等边三角形， $M$  是棱  $PC$  上的一点，设  $\frac{PM}{MC} = k$  ( $M$  与  $C$  不重合)。

(I) 求证： $CD \perp DP$ ；

(II) 若  $PA \parallel$  平面  $BME$ ，求  $k$  的值；

(III) 若二面角  $M-BE-A$  的平面角为  $150^\circ$ ，求  $k$  的值。



(19) (本题满分 14 分)

已知椭圆  $W: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 过原点  $O$  作直线  $l_1$  交椭圆  $W$  于  $A, B$  两点,  $P$  为椭圆上异于  $A, B$  的动点, 连接  $PA, PB$ , 设直线  $PA, PB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$  ( $k_1, k_2 \neq 0$ ), 过  $O$  作直线  $PA, PB$  的平行线  $l_2, l_3$ , 分别交椭圆  $W$  于  $C, D$  和  $E, F$ .

(I) 若  $A, B$  分别为椭圆  $W$  的左, 右顶点, 是否存在点  $P$ , 使  $\angle APB = 90^\circ$ ? 说明理由.

(II) 求  $k_1 \cdot k_2$  的值;

(III) 求  $|CD|^2 + |EF|^2$  的值.

# 北京市朝阳区 2015-2016 学年度第一学期期末高二年级统一考试

## 数学理科答案

2016.1

### 一、选择题（满分 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	A	D	C	A	B	B	C	C

### 二、填空题（满分 30 分）

题号	11	12	13	14	15	16
答案	存在两个等腰直角三角形，它们不相似；假	$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$	$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}x$	$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	②③

### 三、解答题（满分 40 分）

17. （本题满分 12 分）

【解析】（I）在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，点  $E$  和点  $N$  分别为所在棱的中点，

所以  $A_1N \parallel EC$  且  $A_1N = EC$ ，从而四边形  $A_1NCE$  为平行四边形。

所以  $A_1E \parallel NC$ 。

又因为  $A_1E \not\subset$  平面  $NMC$ ， $NC \subset$  平面  $NMC$ ，

所以  $A_1E \parallel$  平面  $NMC$ 。

又点  $M$  是棱  $DD_1$  的中点，

所以  $MN$  是  $\triangle A_1D_1D$  的中位线，所以  $A_1D \parallel MN$ 。

由于  $A_1D \not\subset$  平面  $NMC$ ， $MN \subset$  平面  $NMC$ ，

所以  $A_1D \parallel$  平面  $NMC$ 。

又因为  $A_1E \cap A_1D = A_1$ ， $A_1E \subset$  平面  $A_1DE$ ， $A_1D \subset$  平面  $A_1DE$ ，

所以平面  $A_1DE \parallel$  平面  $NMC$ 。

（II）在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $A_1A \perp$  平面  $ABCD$ ，且  $DE \subset$  平面  $ABCD$ ，

所以  $A_1A \perp DE$ 。

在矩形  $ABCD$  中， $AB=1$ ， $AD=2$ ， $E$  为  $BC$  的中点，

则  $EA=\sqrt{2}$ ， $ED=\sqrt{2}$ ，

从而  $EA^2 + ED^2 = AD^2$ ，即  $AE \perp DE$ 。

因为  $A_1A \subset \text{平面 } A_1AE$  ,  $AE \subset \text{平面 } A_1AE$  ,  $A_1E \cap A_1A = A_1$  ,

所以  $DE \perp \text{平面 } A_1AE$  .

又  $DE \subset \text{平面 } A_1DE$  , 所以  $\text{平面 } A_1DE \perp \text{平面 } A_1AE$  .

18. (本题满分 14 分)

【解析】(I) 因为  $\triangle PAD$  为等边三角形,  $E$  为  $AD$  的中点, 所以  $PE \perp AD$  .

因为  $\text{平面 } PAD \perp \text{平面 } ABCD$  , 且  $\text{平面 } PAD \cap \text{平面 } ABCD = AD$  ,  $PE \subset \text{平面 } PAD$  ,  
所以  $PE \perp \text{平面 } ABCD$  .

又  $CD \subset \text{平面 } ABCD$  , 所以  $PE \perp CD$  .

由已知得  $CD \perp DA$  ,  $PE \cap AD = E$  ,

所以  $CD \perp \text{平面 } PAD$  .

且  $DP \subset \text{平面 } PAD$  , 所以  $CD \perp DP$  .

(II) 连接  $AC$  交  $BE$  于  $N$  , 连接  $MN$  .

因为  $PA \parallel \text{平面 } BME$  ,  $PA \subset \text{平面 } PAC$  ,

$\text{平面 } PAC \cap \text{平面 } BME = MN$  ,

所以  $PA \parallel MN$  .

因为  $AD \parallel BC$  ,  $BC \perp DC$  ,

所以  $\angle CBN = \angle AEN = 90^\circ$  .

又  $CB = AE$  ,  $\angle CNB = \angle ANE$  , 所以  $\triangle CNB \cong \triangle ANE$  .

所以  $CN = NA$  , 则  $M$  为  $PC$  的中点,  $k=1$  .

(III) 方法一:

依题意, 若二面角  $M-BE-A$  的大小为  $150^\circ$  , 则二面角  $M-BE-C$  的大小为  $30^\circ$  .

连接  $CE$  , 过点  $M$  作  $MF \parallel PE$  交  $CE$  于  $F$  , 过  $A(0,1,0)$  作  $FG \perp BE$  于  $G$  , 连接  $MG$  .

因为  $PE \perp \text{平面 } ABCD$  , 所以  $MF \perp \text{平面 } ABCD$  .

又  $BE \subset \text{平面 } ABCD$  , 所以  $MF \perp BE$  .

又  $MF \cap FG = F$  ,  $MF \subset \text{平面 } MFG$  ,  $FG \subset \text{平面 } MFG$  ,

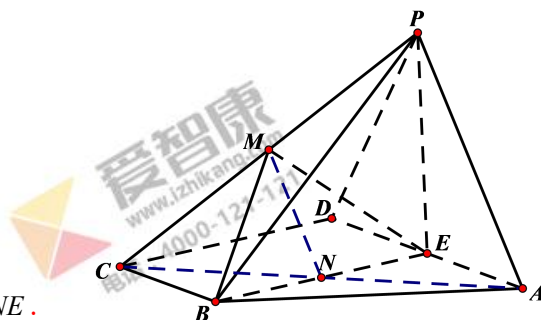
所以  $BE \perp \text{平面 } MFG$  , 从而  $BE \perp MG$  .

则  $\angle MGF$  为二面角  $M-BE-C$  的平面角, 即  $\angle MGF = 30^\circ$  .

在等边  $\triangle PAD$  中,  $PE = \sqrt{3}$  . 由于  $\frac{MF}{PE} = \frac{CM}{PC} = \frac{1}{1+k}$  , 所以  $MF = \frac{\sqrt{3}}{1+k}$  .

又  $\frac{FG}{BC} = \frac{EG}{BE}$  , 所以  $FG = \frac{k}{1+k}$  .

在  $\triangle MFG$  中,  $\tan \angle MGF = \frac{MF}{FG}$  .



解得  $k=3$  .

方法二：由于  $EP \perp EA$  ,  $EP \perp EB$  ,  $EA \perp EB$  , 以  $E$  为原点,  
射线  $EB$  ,  $EA$  ,  $EP$  分别为  $x$  正半轴,  $y$  正半轴,  $z$  正半轴建立空间直角坐标系,

如图, 根据条件  $BC = \frac{1}{2}AD = 1$  ,  $\angle BAD = 60^\circ$  可知:

$$A(0,1,0), B(\sqrt{3},0,0), C(\sqrt{3},-1,0), D(0,-1,0), E(0,0,0), P(0,0,\sqrt{3})$$

平面  $ABE$  即  $xoy$  平面的一个法向量为  $\vec{n}_1 = (0,0,1)$  .

设  $M(x,y,z)$  , 由条件  $\frac{PM}{MC} = k$  可知:  $\overrightarrow{PM} = k\overrightarrow{MC}$  ( $k > 0$ )

$$\text{即 } (x,y,z-\sqrt{3}) = k(\sqrt{3}-x,-1-y,-z)$$

$$\begin{cases} x = k(\sqrt{3}-x) \\ y = k(-1-y) \\ z - \sqrt{3} = -kz \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}k}{1+k} \\ y = -\frac{k}{1+k} \\ z = \frac{\sqrt{3}}{1+k} \end{cases}$$

$$\text{即 } \overrightarrow{EM} = \left( \frac{\sqrt{3}k}{1+k}, -\frac{k}{1+k}, \frac{\sqrt{3}}{1+k} \right), \quad \overrightarrow{EB} = (\sqrt{3}, 0, 0).$$

设平面  $MBE$  的一个法向量为  $\vec{n}_2 = (x', y', z')$  ,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{EM} = \frac{\sqrt{3}k}{1+k}x' + \frac{-k}{1+k}y' + \frac{\sqrt{3}}{1+k}z' = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{EB} = \sqrt{3}x' = 0 \end{cases},$$

$$x' = 0, \text{ 令 } y' = \sqrt{3}, \text{ 则 } z' = k.$$

$$\text{即 } \vec{n}_2 = (0, \sqrt{3}, k).$$

因为二面角  $M-BE-A$  的平面角为  $150^\circ$  ,

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = |\cos 150^\circ|, \quad \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|k|}{\sqrt{3+k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得  $k = \pm 3$  .

因为  $k > 0$  , 所以  $k = 3$  .

19. (本题满分 14 分)

【解析】(I) 不存在点  $P$  , 使  $\angle APB = 90^\circ$  . 说明如下:

设  $P(x_p, y_p)$  . 依题意, 此时  $A(-2,0)$  ,  $B(2,0)$  , 则  $\overrightarrow{AP} = (x_p + 2, y_p)$  ,  $\overrightarrow{BP} = (x_p - 2, y_p)$  .



若  $\angle APB = 90^\circ$ ，则需使  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ ，即  $x_p^2 - 4 + y_p^2 = 0$ 。………… (1)

又点  $P$  在椭圆  $W$  上所以  $\frac{x_p^2}{4} + y_p^2 = 1$ ，把  $y_p^2 = 1 - \frac{x_p^2}{4}$  代入 (1) 式中解得， $x_p = \pm 2$ ，且  $y_p = 0$ 。

显然与  $P$  为椭圆上异于  $A, B$  的点矛盾，所以不存在。

(II) 设  $P(x_p, y_p)$ ， $A(x_A, y_A)$ ，依题意直线  $l_1$  过原点，则  $B(-x_A, -y_A)$ 。

由于  $P$  为椭圆上异于  $A, B$  的点，则直线  $PA$  的斜率  $k_1 = \frac{y_p - y_A}{x_p - x_A}$ ，直线  $PB$  的斜率  $k_2 = \frac{y_p + y_A}{x_p + x_A}$ ，

$$\text{即 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_p^2 - y_A^2}{x_p^2 - x_A^2}.$$

椭圆  $W$  的方程化为  $x^2 + 4y^2 = 4$ ，由于点  $P$  和点  $A$  都为椭圆  $W$  上的点，则

$$\begin{cases} x_p^2 + 4y_p^2 = 4 \\ x_A^2 + 4y_A^2 = 4 \end{cases}, \text{ 两式相减得 } x_p^2 - x_A^2 + 4(y_p^2 - y_A^2) = 0, \text{ 因为点 } P \text{ 和点 } A \text{ 不重合，所以}$$

$$1 + 4 \times \frac{y_p^2 - y_A^2}{x_p^2 - x_A^2} = 0, \text{ 即 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_p^2 - y_A^2}{x_p^2 - x_A^2} = -\frac{1}{4}.$$

(III) 方法一：

由于  $l_2, l_3$  分别平行于直线  $PA, PB$ ，则直线  $l_2$  的斜率  $k_{CD} = k_1$ ，直线  $l_3$  的斜率  $k_{EF} = k_2$ 。

设直线  $l_2$  的方程为  $y = k_1 x$ ，代入到椭圆方程中，得  $x^2 + 4k_1^2 x^2 = 4$ ，解得  $x^2 = \frac{4}{4k_1^2 + 1}$ 。

设  $C(x_C, y_C)$ ，由直线  $l_2$  过原点，则  $D(-x_C, -y_C)$ 。

$$\text{则 } |CD|^2 = [x_C - (-x_C)]^2 + [y_C - (-y_C)]^2 = 4(x_C^2 + y_C^2).$$

$$\text{由于 } y_C = k_1 x_C, \text{ 所以 } |CD|^2 = 4(1 + k_1^2)x_C^2, \text{ 即 } |CD|^2 = 16 \frac{k_1^2 + 1}{4k_1^2 + 1}.$$

直线  $l_3$  的方程为  $y = k_2 x$ ，代入到椭圆方程中，得  $x^2 + 4k_2^2 x^2 = 4$ ，解得  $x^2 = \frac{4}{4k_2^2 + 1}$ 。

$$\text{同理可得 } |EF|^2 = 16 \frac{k_2^2 + 1}{4k_2^2 + 1}. \text{ 则 } |CD|^2 + |EF|^2 = 16 \left( \frac{k_1^2 + 1}{4k_1^2 + 1} + \frac{k_2^2 + 1}{4k_2^2 + 1} \right).$$

$$\text{由 (II) 问 } k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{4}, \text{ 且 } k_1 \neq 0, \text{ 则 } k_2 = -\frac{1}{4k_1}.$$

$$\text{即 } |CD|^2 + |EF|^2 = 16 \left( \frac{k_1^2 + 1}{4k_1^2 + 1} + \frac{\frac{1}{16k_1^2} + 1}{4 \cdot \frac{1}{16k_1^2} + 1} \right)$$

化简得  $|CD|^2 + |EF|^2 = 16 \left[ \frac{4k_1^2 + 4 + 16k_1^2 + 1}{4(4k_1^2 + 1)} \right]$ .

即  $|CD|^2 + |EF|^2 = 20$ .

方法二:

设  $C(x_C, y_C)$ ,  $E(x_E, y_E)$ , 由直线  $l_2, l_3$  都过原点, 则  $D(-x_C, -y_C)$ ,  $F(-x_E, -y_E)$ .

由于  $l_2, l_3$  分别平行于直线  $PA, PB$ , 则直线  $l_2$  的斜率  $k_{CD} = k_1$ , 直线  $l_3$  的斜率  $k_{EF} = k_2$ , 由 (II)

知  $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{4}$ , 可得  $k_{CD} \cdot k_{EF} = -\frac{1}{4}$ . 由于  $k_{CD} = k_1 \neq 0$ , 则  $k_{EF} = -\frac{1}{4k_1}$ . 由于点  $C$  不可能在  $x$  轴上,

即  $y_C \neq 0$ , 所以  $k_{EF} = -\frac{x_C}{4y_C}$ , 过原点的直线  $l_3$  的方程为  $y = -\frac{x_C}{4y_C}x$ , 代入椭圆  $W$  的方程中,

得  $x^2 + \left( 4 \times \frac{1}{16} \times \frac{x_C^2}{y_C^2} \right) x^2 = 4$ , 化简得  $x^2 = \frac{16y_C^2}{4y_C^2 + x_C^2}$ .

由于点  $C(x_C, y_C)$  在椭圆  $W$  上, 所以  $x_C^2 + 4y_C^2 = 4$ , 所以  $x^2 = 4y_C^2$ , 不妨设  $x_E = 2y_C$ , 代入到

直线  $y = -\frac{x_C}{4y_C}x$  中, 得  $y_E = -\frac{1}{2}x_C$ . 即  $E\left(2y_C, -\frac{1}{2}x_C\right)$ , 则  $F\left(-2y_C, \frac{1}{2}x_C\right)$ .

$|CD|^2 + |EF|^2 = 4(x_C^2 + y_C^2 + y_E^2 + x_E^2) = 4\left(x_C^2 + y_C^2 + 4y_C^2 + \frac{1}{4}x_C^2\right) = 4\left[4 + \frac{1}{4}(x_C^2 + 4y_C^2)\right]$ .

又  $x_C^2 + 4y_C^2 = 4$ , 所以  $|CD|^2 + |EF|^2 = 20$ .

# 选填解析

## 一、选择题

### 1. 【答案】D

【解答】当  $x=1$  时，代入圆方程得， $y=\pm\sqrt{3}$ ，所以弦长为  $2\sqrt{3}$ 。

故选 D。

### 2. 【答案】C

【解答】设点  $P(x,y)$ ，由抛物线的定义可知， $P$  到焦点的距离等于  $P$  到准线的距离，即  $x+\frac{1}{2}=3$ ，

解得  $x=\frac{5}{2}$ 。

故选 C。

### 3. 【答案】A

【解答】对于  $q$ ，解不等式得  $x>2$  或  $x<-2$ ，所以  $p$  是  $q$  的充分不必要条件。

故选 A。

### 4. 【答案】D

【解答】对于 A，当  $b\subset\alpha$  也可以成立；

对于 B， $\alpha$  和  $\beta$  相交时，也成立；

对于 C，当  $a\subset\beta$  时也成立。

故选 D。

### 5. 【答案】C

【解答】设点  $P(x,y)$ ，则点  $D(x,0)$ ，设线段  $PD$  的中点  $M$  的坐标为  $(x_0,y_0)$ ，则  $x_0=x$ ， $y_0=\frac{y}{2}$ ，

将其代入圆方程，解得  $\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}=1$ 。

故选 C。

### 6. 【答案】A

【解答】由题意得  $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ 。

故选 A。

### 7. 【答案】B

【解答】将  $x^2=y^2$  代入方程  $x^2+(y-b)^2=2$ ，解得  $2y^2-2by+b^2-2=0$ ，两方程至多有两组不同的

实数解，即上述方程  $\Delta\leq 0$ ，解得  $-4b^2+16\leq 0$ ，所以  $b\geq 2$  或  $b\leq -2$ 。

故选 B。

### 8. 【答案】B

【解答】将直线与圆联立方程  $\begin{cases} y = x + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ ，消  $y$  解得， $2x^2 + 2bx + b^2 - 4 = 0$ ，所以  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = \frac{b^2 - 4}{2} \end{cases}$ ，

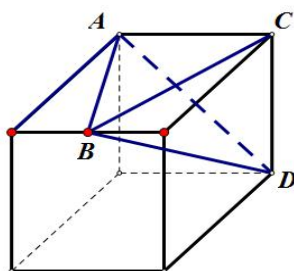
由题意可得  $|\overrightarrow{P_1 P_2}| \geq |\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}|$ ，即为  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ ，解得  $b^2 \leq 4$ ，所以  $b$  的最大值为 2，故选 B.

9. 【答案】C

【解答】由已知三视图还原几何体如图，

$$V_{B-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 4 = \frac{32}{3}.$$

故选 C.



10. 【答案】C

【解答】依题意得  $r \leq \sqrt{(0-x)^2 + (r-y)^2}$ ，解得  $r^2 \leq x^2 + r^2 - 2yr + y^2$ ，即  $y^2 - 2ry + 4y \geq 0$ ，

所以  $y(y + 4 - 2r) \geq 0$ ，由于  $y \geq 0$ ，所以  $y + 4 - 2r \geq 0$ ，解得  $r \leq \frac{y}{2} + 2$ ，

所以  $r$  的最大值为 2，所以周长最大为  $4\pi$ 。

故选 C.

## 二、填空题

11. 【答案】存在两个等腰直角三角形，它们不相似；假

【解答】由命题的否定的定义，可知命题  $p$  的否定是：存在两个等腰直角三角形，它们不相似；此命题为假命题。

故答案为存在两个等腰直角三角形，它们不相似；假。

12. 【答案】 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

【解答】 $\triangle AOB$  为直角三角形，所以外接圆圆心为  $AB$  中点  $(4, 3)$ ，半径  $r = \frac{|AB|}{2} = \frac{10}{2} = 5$ ，所以外接

圆的方程为  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ 。

故答案为  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ 。

13. 【答案】 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}x$

【解答】由题意可知  $2b = 4\sqrt{2}$ ，即  $b = 2\sqrt{2}$ ，离心率  $e = \frac{c}{a} = 3$ ，由  $c^2 = a^2 + b^2$ ，解得  $c = 3$ ， $a = 1$ ，

所以双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}x$ .

故答案为  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}x$ .

14. 【答案】  $\frac{5}{2}$

【解答】若直线斜率不存在，则满足题意，当  $x=1$  时，解得  $y = \pm \frac{3}{2}$ ，椭圆上的点到两焦点距离和为  $2a=4$ ，所以  $|AF_1| = \frac{5}{2}$ ；

若直线斜率存在，设直线为  $y = k(x-1)$ ，与圆联立方程得  $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ ，

解得  $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2} = 2$ ，解得  $k$  无解。

故答案为  $\frac{5}{2}$ 。

15. 【答案】  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解答】由题意得， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ，连结  $AC$ ， $AC \subset$  面  $ABCD$ ，所以  $PA \perp AC$ ， $PC$  与平面  $ABCD$  所成角的即为  $\angle PCA$ ，根据边长关系  $PA = \sqrt{2}$ ，

$AC = \sqrt{3}$ ，可得  $\tan \angle PCA = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

故答案为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

16. 【答案】 ②③

【解答】①  $CD_1$  与  $BM$  不垂直，所以  $CD_1 \perp$  平面  $BMN$ ，不正确；

② 平面  $BMN \parallel$  平面  $AB_1D_1$ ，所以  $MN \parallel$  平面  $AB_1D_1$ ，正确；

③ 两个三角形等底等高， $\triangle D_1MN$  的面积与  $\triangle CMN$  的面积相等，正确；

④  $M$  与  $B$  重合，三棱锥  $D-MNC$  的体积最大，不正确。

故答案为 ②③。

