

北京 101 中学 2015-2016 学年上学期高二年级理科期末考试数学试卷

一、选择题：本大题共 8 小题，共 40 分.

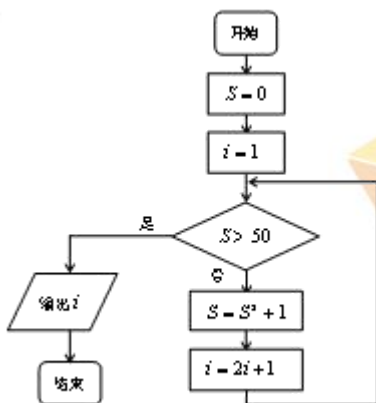
1. 对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本，当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时，总体中每个个体被抽中的概率分别为 P_1, P_2, P_3 ，则 ().

- A. $p_1 = p_2 = p_3$ B. $p_1 = p_2 < p_3$
C. $p_1 = p_3 < p_2$ D. $p_3 = p_2 < p_1$

2. 某公司10位员工的月工资(单位:元)为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$, 其均值和方差分别为 \bar{x} 和 s^2 , 若从下月起每位员工的月工资增加100元, 则这10位员工下月工资的均值和方差分别为 ()

- A. \bar{x} , $s^2 + 100^2$
- B. $\bar{x} + 100$, $s^2 + 100^2$
- C. \bar{x} , s^2
- D. $\bar{x} + 100$, s^2

3. 某程序框图如图所示, 该程序运行后输出*i*的值是 ().



- A. 27 B. 31 C. 63 D. 15

4. 某学校三个社团的人员分布如下表（每名同学只参加一个社团）

	围棋社	戏剧社	书法社
高中	45	30	a
初中	15	10	20

学校要对这三个社团的活动效果进行抽样调查，按分层抽样的方法从社团成员中抽取30人，结果围棋社被抽出12人，则这三个社团共有（ ）

- A. 130 人 B. 140 人 C. 150 人 D. 160 人

5. 下列结论中正确的个数是 ()

①命题 “ $\exists x \in R, x^2 - x > 0$ ” 的否定是 “ $\forall x \in R, x^2 - x \leq 0$ ” ;

②若 $\neg p$ 是 q 的必要条件, 则 p 是 $\neg q$ 的充分条件;

③命题 “若 $am^2 < bm^2$, 则 $a < b$ ” 的逆命题是真命题;

④ $\forall x \in R$, 不等式 $x^2 + 2x > 4x - 3$ 均成立.

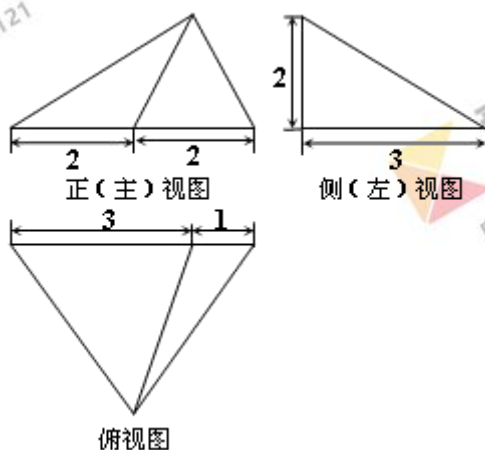
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

6. 若区间 $(0,1)$ 上任取一实数 b , 则方程 $x^2 + x + b = 0$ 有实根的概率为 ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

7. 某几何体的三视图如图所示, 该几何体的体积是 () .

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{3}$
C. 2 D. 4



8. 已知点 $M(-3,2)$ 是坐标平面内一定点, 若抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F , 点 Q 是该抛物线上的一动点, 则 $|MQ| - |QF|$ 的最小值是 () .

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. 2

二、填空题: 本大题共 6 小题, 共 30 分.

9. 某同学进入高三后, 4 次月考的数学成绩的茎叶图如下图, 则该同学数学成绩的方差是_____.

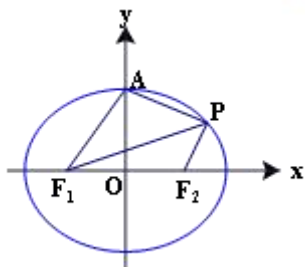
11	4
12	6 8
13	2

10. 若直线 $x - my + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相切, 则 m 的值为_____.

11. 在某省举办的运动会期间, 某志愿者小组由 12 名大学生组成, 其中男生 8 名, 女生 4 名, 从中抽取 3 名学生组成礼宾接待小组, 则这 3 名学生恰好是按性别分层抽样得到的概率为_____.

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 且该双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$, 则该双曲线的渐近线方程为_____.

13. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 上顶点为 A , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 P 为椭圆在第一象限内的一点. 若 $S_{\triangle PF_1A} : S_{\triangle PF_1F_2} = 2 : 1$, 则直线 PF_1 的斜率为_____.



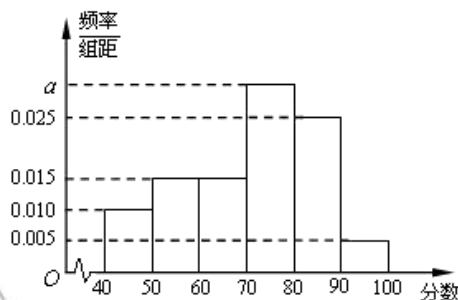
14. 已知直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (a, b 是非零常数) 与圆 $x^2 + y^2 = 100$ 有公共点, 且公共点的横坐标和纵坐标均为整数, 那么这样的直线共有_____.

三、解答题: 本大题共 4 小题, 共 50 分.

15. (本小题满分 12 分) 某校从参加环保知识竞赛的学生中抽出 60 名, 将其成绩 (均为整数) 分成六段 $[40, 50)$, $[50, 60)$, \dots , $[90, 100]$ 后得到频率分布直方图 (如下图所示).

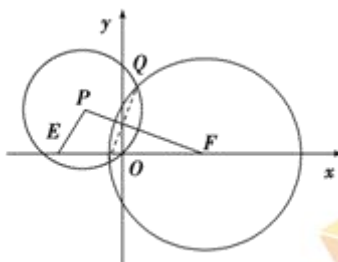
(I) 求分数在 $[70, 80)$ 内的频率;

(II) 根据频率分布直方图, 估计该校学生环保知识竞赛成绩的平均分;



(III) 用分层抽样的方法在 80 分以上（含 80 分）的学生中抽取一个容量为 6 的样本，将该样本看成一个总体，从中任意选取 2 人，求其中恰有 1 人的分数不低于 90 分的概率。

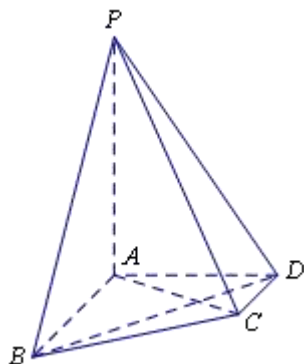
16. （本小题满分 12 分）如图，已知 $O(0,0)$ ， $E(-\sqrt{3},0)$ ， $F(\sqrt{3},0)$ ，圆 F ： $(x-\sqrt{3})^2+y^2=5$ ．动点 P 满足 $|PE|+|PF|=4$ ．以 P 为圆心， $|OP|$ 为半径的圆 P 与圆 F 的一个公共点为 Q ．



(I) 求点 P 的轨迹方程；

(II) 证明：点 Q 到直线 PF 的距离为定值，并求此值。

17. （本小题满分 13 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB=4$ ， $AD=2\sqrt{2}$ ， $CD=2$ ， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA=4$ ．



(I) 设平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = m$ ，求证： $CD \parallel m$ ；

(II) 求证： $BD \perp$ 平面 PAC ；

(III) 设点 Q 为线段 PB 上一点, 且直线 QC 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\frac{PQ}{PB}$ 的值.

18. (本小题满分 13 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(2, 1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 过点 $B(3, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N .

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 求 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的取值范围;

(III) 设直线 AM 和直线 AN 的斜率分别为 k_{AM} 和 k_{AN} , 求证: $k_{AM} + k_{AN}$ 为定值.

北京 101 中学 2015-2016 学年上学期高二年级理科期末考试数学试卷

试题答案

一、选择题：本大题共 8 小题，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	C	C	A	D	B

二、填空题：本大题共 6 小题，共 30 分。

9. 45

10. $\pm\sqrt{3}$

11. $\frac{28}{55}$

12. $y = \pm 2x$

13. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

14. 60 条

15. 解：（I）分数在 $[70, 80)$ 内的频率为：

$$1 - (0.010 + 0.015 + 0.015 + 0.025 + 0.005) \times 10 = 1 - 0.7 = 0.3$$

（II）平均分为： $\bar{x} = 45 \times 0.1 + 55 \times 0.15 + 65 \times 0.15 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.25 + 95 \times 0.05 = 71$ （分）。

（III）由题意， $[80, 90)$ 分数段的人数为： $0.25 \times 60 = 15$ （人），

$[90, 100]$ 分数段的人数为： $0.05 \times 60 = 3$ （人）；

因为用分层抽样的方法在 80 分以上（含 80 分）的学生中抽取一个容量为 6 的样本，所以 $[80, 90)$ 分数段抽取 5 人，分别记为 A, B, C, D, E ；

$[90, 100]$ 分数段抽取 1 人，记为 M 。

因为从样本中任取 2 人，其中恰有 1 人的分数不低于 90 分，

则另一人的分数一定是在 $[80, 90)$ 分数段，所以只需在分数段 $[80, 90)$ 抽取的 5 人中确定 1 人。

设“从样本中任取 2 人，其中恰有 1 人的分数不低于 90 分为”事件 A ，

则基本事件空间包含的基本事件有： $(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E), (A, M), (B, M), (C, M), (D, M), (E, M)$ 共 15 种。

事件 A 包含的基本事件有 (A, M) , (B, M) , (C, M) , (D, M) , (E, M) 5 种

所以恰有 1 人的分数不低于 90 分的概率为 $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

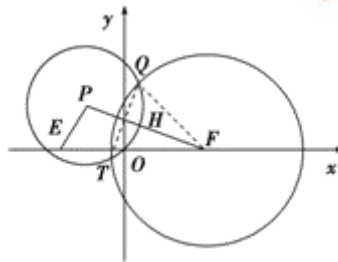
16. (I) 解: 由 $|PE| + |PF| = 4 > |EF|$ 及椭圆定义知,

点 P 的轨迹是以 E, F 为焦点, 4 为长轴长的椭圆.

设 $P(x, y)$, 则点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 证明: 设圆 P 与圆 F 的另一个公共点为 T , 连接 QT ,

并设 $P(x_0, y_0)$, $Q(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$,



则由题意知, 圆 P 的方程为 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2$.

又 Q 为圆 P 与圆 F 的一个公共点,

$$\begin{cases} (x_1 - \sqrt{3})^2 + y_1^2 = 5 \\ (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 \end{cases},$$

所以 $(x_0 - \sqrt{3})x_1 + y_0y_1 - 1 = 0$.

同理 $(x_0 - \sqrt{3})x_2 + y_0y_2 - 1 = 0$.

因此直线 QT 的方程为 $(x_0 - \sqrt{3})x + y_0y - 1 = 0$.

设 PF 交 QT 于 H , 则 $PF \perp QT$. 设 $|QH| = d (d > 0)$,

$$\text{则在 Rt}\triangle QHF \text{ 中, } |FH| = \frac{|\sqrt{3}(x_0 - \sqrt{3}) - 1|}{\sqrt{(x_0 - \sqrt{3})^2 + y_0^2}}.$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1, \text{ 故 } |FH| = \frac{|\sqrt{3}(x_0 - \sqrt{3}) - 1|}{\sqrt{(x_0 - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}}} = 2 \times \frac{|\sqrt{3}(x_0 - \sqrt{3}) - 1|}{\sqrt{[\sqrt{3}(x_0 - \sqrt{3}) - 1]^2}} = 2$$

在 $\text{Rt}\triangle QHF$ 中, $d = \sqrt{5 - |FH|^2} = 1$. 所以点 Q 到直线 PF 的距离为 1.

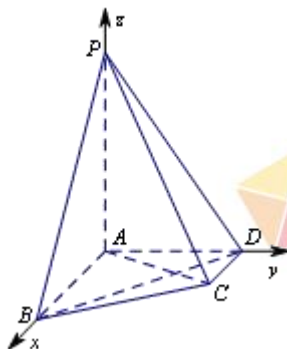
17. (I) 证明: 因为 $AB \parallel CD$, $CD \not\subset$ 平面 PAB ,

$AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $CD \parallel$ 平面 PAB .

因为 $CD \subset \text{平面 } PCD$ ，平面 $PAB \cap \text{平面 } PCD = m$ ，

所以 $CD \parallel m$ 。

(II) 证明：因为 $AP \perp \text{平面 } ABCD$ ， $AB \perp AD$ ，所以以 A 为坐标原点，
 AB ， AD ， AP 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图空间直角坐标系，



则 $B(4,0,0)$ ， $P(0,0,4)$ ， $D(0,2\sqrt{2},0)$ ， $C(2,2\sqrt{2},0)$ 。

所以 $\overrightarrow{BD} = (-4, 2\sqrt{2}, 0)$ ， $\overrightarrow{AC} = (2, 2\sqrt{2}, 0)$ ，

$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 4)$ ，

所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \times 2 + 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + 0 \times 0 = 0$ ，

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AP} = (-4) \times 0 + 2\sqrt{2} \times 0 + 0 \times 4 = 0$ 。

所以 $BD \perp AC$ ， $BD \perp AP$ 。

因为 $AP \cap AC = A$ ， $AC \subset \text{平面 } PAC$ ，

$PA \subset \text{平面 } PAC$ ，

所以 $BD \perp \text{平面 } PAC$ 。

(III) 解：设 $\frac{PQ}{PB} = \lambda$ (其中 $0 \neq \lambda \neq 1$)， $Q(x, y, z)$ ，直线 QC 与平面 PAC 所成角

为 θ 。所以 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PB}$ 。所以 $(x, y, z - 4) = \lambda(4, 0, -4)$ 。

$$\text{所以 } \begin{cases} x = 4\lambda, \\ y = 0, \\ z = -4\lambda + 4, \end{cases} \quad \text{即 } Q(4\lambda, 0, -4\lambda + 4)。$$

所以 $\overrightarrow{CQ} = (4\lambda - 2, -2\sqrt{2}, -4\lambda + 4)$ 。

由 (II) 知平面 PAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD} = (-4, 2\sqrt{2}, 0)$ 。

$$\text{因为 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{CQ}| |\overrightarrow{BD}|}，$$

所以 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \left| \frac{-4(4\lambda-2)-8}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{(4\lambda-2)^2+8+(-4\lambda+4)^2}} \right|$.

解得 $\lambda = \frac{7}{12} \in [0, 1]$. 所以 $\frac{PQ}{PB} = \frac{7}{12}$.

18. (I) 解: 由题意得 $\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ 解得 $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 解: 由题意知, 显然直线 l 的斜率存在, 设直线 l 方程为 $y = k(x-3)$,

由 $\begin{cases} y = k(x-3), \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2 - 12k^2x + 18k^2 - 6 = 0$.

因为直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M , N ,

所以 $\Delta = 144k^4 - 4(1+2k^2)(18k^2-6) = 24(1-k^2) > 0$, 解得 $-1 < k < 1$.

设 M , N 的坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ,

则 $x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{1+2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{18k^2-6}{1+2k^2}$, $y_1 = k(x_1-3)$, $y_2 = k(x_2-3)$.

所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = (x_1-3)(x_2-3) + y_1y_2$

$$= (1+k^2)[x_1x_2 - 3(x_1+x_2) + 9] = \frac{3+3k^2}{1+2k^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2(1+2k^2)}.$$

因 $-1 < k < 1$, 所以 $2 < \frac{3}{2} + \frac{3}{2(1+2k^2)} \leq 3$.

故 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的取值范围为 $(2, 3]$.

(III) 证明: 由 (II) 得 $k_{AM} + k_{AN} = \frac{y_1-1}{x_1-2} + \frac{y_2-1}{x_2-2}$

$$= \frac{(kx_1-3k-1)(x_2-2) + (kx_2-3k-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$= \frac{2kx_1x_2 - (5k+1)(x_1+x_2) + 12k+4}{x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4}$$

$$= \frac{2k(18k^2 - 6) - (5k + 1) \cdot 12k^2 + (12k + 4)(1 + 2k^2)}{18k^2 - 6 - 24k^2 + 4(1 + 2k^2)}$$

$$= \frac{-4k^2 + 4}{2k^2 - 2} = -2.$$

所以 $k_{AM} + k_{AN}$ 为定值 -2 .

北京 101 中学 2015-2016 学年上学期高二年级理科期末考试数学试卷

试题部分解析

1. 【答案】A

【解析】无论哪种手痒，每个个体被抽中的概率都是相等的.

2. 【答案】D

【解析】每位员工的月工资增加 100 元，
所以平均值也增加 100 元，
此时各员工工资的波动性并没有发生变化，
即方差不变.

3. 【答案】C

【解析】 $\begin{cases} S=0 \\ i=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=1 \\ i=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=2 \\ i=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=5 \\ i=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=26 \\ i=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=26 \\ i=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=677 \\ i=63 \end{cases}$ ，结束.

4. 【答案】C

【解析】设这三个社团共有 n 人，

$$\text{则 } \frac{12}{30} = \frac{45+15}{n},$$

解得： $n=150$.

5. 【答案】C

【解析】对于③：命题的逆命题为若 $a < b$ ，则 $am^2 < bm^2$ ，当 $m=0$ 时，命题不成立，所以③错误.

6. 【答案】A

【解析】方程有实根可得 $\Delta = 1 - 4b \geq 0$ ，

$$\text{解得 } b \leq \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{所求概率 } P = \frac{\frac{1}{4} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{4}.$$

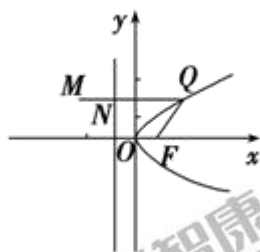
7. 【答案】D

【解析】还原三视图可得该几何体是一个三棱锥，底面积为 $6 \times 2 \times \frac{1}{3} = 4$ ，体积为 4.

8. 【答案】B

【解析】抛物线的准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$ ，由图知，当 $MQ \parallel x$ 轴时， $|MQ| - |QF|$ 取得最小值，

$$\text{此时 } |QM| - |QF| = |2 + 3| - \left| 2 + \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2}.$$



9. 【答案】45

【解析】读出该同学四次考试成绩分别为114, 126, 128, 132,

则该同学数学成绩的平均数为 $\frac{114+126+128+132}{4}=125$,

方差 $=\frac{1}{4}[(114-125)^2+(126-125)^2+(128-125)^2+(132-125)^2]=45$.

10. 【答案】 $\pm\sqrt{3}$

【解析】由 $x^2+y^2-2x=0$, 得圆心坐标为(1,0), 半径为1, 因为直线与圆相切, 所以圆心到直线的距离等于半径, 即 $\frac{|1-0+1|}{\sqrt{1+m^2}}=1$, 解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

11. 【答案】 $\frac{28}{55}$

【解析】从12名学生中随机抽取3名学生的选法数为 C_{12}^3 , 若按性别进行分层抽样, 则应抽取男生2名, 女生1名, 选法数为 $C_8^2 \cdot C_4^1$, 因此这3名学生恰好是按性别分层抽样组成的

概率为 $\frac{C_8^2 \cdot C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{28}{55}$.

12. 【答案】 $y=\pm 2x$

【解析】抛物线的焦点坐标为(1,0),

因为双曲线的一个焦点与抛物线的焦点重合,

$\therefore c=1$,

\therefore 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$,

$\therefore \frac{c}{a}=\sqrt{5}$,

$\therefore a=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore b^2=c^2-a^2=\frac{4}{5}$,

$$\therefore b = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

\therefore 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 2x$.

13. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{5}$

【解析】 设 PF 与 y 轴的交点为 B ，连接 OP ，则 $S_{\triangle PF_1A} = 4S_{\triangle PF_1O}$ ，进而得 $AB = 4OB$ ，则

$$k_{PF_1} = \frac{OB}{OF_1} = \frac{b}{5c} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

14. 【答案】 60 条

【解析】 由于满足 $x^2 + y^2 = 100$ 的整数点 (x, y) 有 12 个，

它们分别为 $(\pm 10, 0)$ ， $(\pm 6, \pm 8)$ ， $(\pm 8, \pm 6)$ ， $(0, \pm 10)$ ，

故直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 与圆的交点必须经过这些点，

但 a ， b 为非零常数，

故在以这些点为公共点的直线中有这样几类：

一类公共点为 2 个点，去除垂直坐标轴和经过原点的直线，共有 $C_{12}^2 - 10 - 4 = 52$ 条；

另一类为公共点为 1 个点（即圆的切线），同样去除垂直坐标轴的直线，共有 8 条。

综上，所求的直线共有 60 条。