

北京市房山区 2015~2016 学年度高一上学期期末

数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项，直接写在答题纸上。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $B = \{-2, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ，则集合 $A \cap B =$ ()。

A. $\{2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4, 5\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ D. $\{-2, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ ，则 $f(-1) =$ ()。

A. -2 B. 2 C. -3 D. 3

3. 已知 $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ， $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ，则 $\tan \alpha =$ ()。

A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

4. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ 的图象一定经过 ()。

A. 第一、二、三象限 B. 第一、二、四象限
C. 第一、三、四象限 D. 第二、三、四象限

5. 已知函数 $f(x) = \log_2(x+1)$ ，若 $f(\alpha) = 1$ ， $\alpha =$ ()。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 下列各式的值为 $\frac{1}{4}$ 的是 ()。

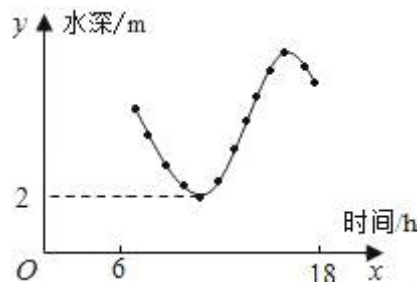
A. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ B. $1 - 2\sin^2 75^\circ$

C. $\frac{2\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$ D. $2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$

7. 下列各函数为偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数的是 ()。

A. $y = x + 3$ B. $y = x^2 + x$ C. $y = x|x|$ D. $y = -|x|$

8. 如图, 某港口一天6时到18时的水深变化曲线近似满足函数 $y = 3\sin(\frac{\pi}{6}x + \varphi) + k$. 据此函数可知, 这段时间水深(单位: m) 的最大值为 ().



A. 5 B. 6 C. 8 D. 10

9. 已知 $a = \tan 1$, $b = \tan 2$, $c = \tan 3$, 则 a , b , c 的大小关系为 ().

A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

10. 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 是“严格下凸函数”, 下列函数是严格下凸函数的是 ().

A. $y = x$ B. $y = |x|$ C. $y = x^2$ D. $y = \log_2 x$

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每题 5 分, 共 30 分. 将答案直接写在答题纸上.

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ 2^x - 3, & x > 0 \end{cases}$, 那么 $f(2) =$ _____.

12. 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 4]$, 则函数 $f(2x-3)$ 的定义域是_____.

13. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x \geq m\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 m 的取值范围为_____.

14. 若 α 是第三象限角, 且 $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第_____象限角.

15. 已知 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, α , β 都是第二象限角, 则 $\cos(\alpha + \beta) =$ _____.

16. 某种病毒每经 30 分钟由 1 个病毒可分裂成 2 个病毒, 经过 x 小时后, 病毒个数 y 与时间 x (小时) 的函数关系式为_____, 经过 5 小时, 1 个病毒能分裂成_____个.



三、解答题：本大题共 6 小题，写出必要的文字说明，计算或证明过程．其中第 16 题满分 70 分，第 17 题到第 22 题，每题满分 70 分；共计 70 分．将解题过程直接在答题纸上．

17. 已知全集 $U = \{x | -6 \leq x \leq 5\}$ ， $M = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$ ， $N = \{x | 0 < x < 2\}$ ．

(I) 求 $M \cup N$ ；

(II) 求 $C_U(M \cap N)$ ．



18. 已知 $\sin\theta = 2\cos\theta$, 求值:

(I) $\frac{6\sin\theta + \cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta}$;

(II) $\frac{\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta - \cos^2\theta}$.



19. 已知函数 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x$

(I) 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.



20. 设 m 是实数, 函数 $f(x) = m - \frac{3}{3^x - 1}$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域;

(II) 用定义证明: 对于任意实数 m , 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.



21. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，当 $x, y \in \mathbf{R}$ 时，恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 。

(I) 求 $f(0)$ 的值；

(II) 写出一个具体函数，满足题目条件；

(III) 求证： $f(x)$ 是奇函数。



22. 已知函数 $f(x) = \log_a(1+x)$, $g(x) = \log_a(1-x)$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(I) 设 $a = 2$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[3, 63]$, 求函数 $f(x)$ 的最值.

(II) 求使 $f(x) - g(x) > 0$ 的 x 的取值范围.

北京市房山区 2015~2016 学年度高一上学期期末数学试卷

数学答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	C	D	B	A	D	C	B	C

二、填空题

题号	11	12	13	14	15	16
答案	1	$\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$	$(-\infty, -2]$	四	$\frac{3\sqrt{5}-8}{15}$	$y=4^x$, 1024

三、解答题

17.

解：（I）因为 $M = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x | 0 < x < 2\}$,

所以 $M \cup N = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$;

（II）因为 $U = \{x | -6 \leq x \leq 5\}$, $M = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$,

$N = \{x | 0 < x < 2\}$,

所以 $M \cap N = \{x | 0 < x < 2\}$;

所以 $C_U(M \cap N) = \{x | -6 \leq x \leq 0 \text{ 或 } 2 \leq x \leq 5\}$.

18.

解：（I）因为 $\sin \theta = 2 \cos \theta$, 所以 $\tan \theta = 2$,

$$\therefore \frac{6 \sin \theta + \cos \theta}{3 \sin \theta - 2 \cos \theta} = \frac{6 \tan \theta + 1}{3 \tan \theta - 2} = \frac{13}{4}.$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta + 2 \tan \theta}{2 \tan^2 \theta - 1} = \frac{8}{7}.$$

19.

$$\text{解：(I)} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{(II)} \quad f(x) = 2(2(\cos x)^2 - 1) + (1 - (\cos x)^2) = 3(\cos x)^2 - 1.$$

$$\therefore \cos x \in [-1, 1].$$

$\therefore \cos x = \pm 1$ 时 $f(x)$ 取最大值 2.

$\cos x = 0$ 时 $f(x)$ 取最小值 -1.

20.

解: (I) 解: 由 $3^x - 1 \neq 0$ 得, $x \neq 0$;

$\therefore f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

(II) 证明: 设 $x_1 > x_2 > 0$ 则:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{3^{x_2} - 1} - \frac{3}{3^{x_1} - 1} = \frac{3(3^{x_1} - 3^{x_2})}{(3^{x_1} - 1)(3^{x_2} - 1)};$$

\therefore 指数函数 $y = 3^x$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 且 $x_1 > x_2 > 0$;

$\therefore 3^{x_1} > 3^{x_2} > 1$;

$\therefore 3^{x_1} - 3^{x_2} > 0$, $3^{x_1} - 1 > 0$, $3^{x_2} - 1 > 0$;

$\therefore (x_1) > f(x_2)$;

\therefore 对于任意实数 m , 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

21.

解: (I) 令 $x = y = 0$, 则 $f(0+0) = f(0) + f(0)$,

所以 $f(0) = f(0) + f(0)$,

所以 $f(0) = 0$,

(II) $f(x) = 0$ 或 $f(x) = 2x$ 等均可.

(III) 证明: 令 $y = -x$, 则 $f(x-x) = f(x) + f(-x)$,

所以 $f(0) = f(x) + f(-x)$,

因为 $f(0) = 0$,

所以 $f(x) + f(-x) = 0$,

所以 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数.

22.

解: (I) 当 $a = 2$ 时, 函数 $f(x) = \log_2(x+1)$ 为 $[3, 63]$ 上的增函数,

故 $f(x)_{\max} = f(63) = \log_2(63+1) = 6$,

$f(x)_{\min} = f(3) = \log_2(3+1) = 2$.

(II) $f(x) - g(x) > 0$, 即 $\log_a(1+x) > \log_a(1-x)$,

① 当 $a > 1$ 时, 由 $1+x > 1-x > 0$, 得 $0 < x < 1$, 故此时 x 的范围是 $(0, 1)$.



②当 $0 < a < 1$ 时，由 $0 < 1+x < 1-x$ ，得 $-1 < x < 0$ ，故此时 x 的范围是 $(-1, 0)$ 。

北京市房山区 2015~2016 学年度高一上学期期末数学试卷

数学试卷部分解析

一、选择题

1. 【答案】B

【解析】 $\because A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, 2, 3, 4, 5, 9\}$,

$$\therefore A \cap B = \{2, 3, 4, 5\},$$

故选：B.

2. 【答案】C

【解析】 \because 已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$,

$$\therefore f(-1) = -f(1) = -(1+2) = -3,$$

故选：C.

3. 【答案】C

【解析】 \because 已知 $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$,

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4},$$

故选：C.

4. 【答案】D

【解析】函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ 为减函数，且图象经过 $(-2, 2)$ 、 $(0, -1)$ ，

故它的图象经过第二、三、四象限，

故选：D.

5. 【答案】B

【解析】 $\because f(\alpha) = \log_2(\alpha + 1) = 1$

$$\therefore \alpha + 1 = 2, \text{ 故 } \alpha = 1,$$

故选 B.

6. 【答案】A

【解析】根据 $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$;

$$1 - 2\sin^2 75^\circ = \cos 15^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{2\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \tan 45^\circ = 1;$$

$$2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选：A.

7. 【答案】D

【解析】A. $y = x + 3$ 的图象不关于 y 轴对称，不是偶函数， \therefore 该选项错误；

B. $x = -1$ 时， $y = 0$ ； $x = 1$ 时， $y = 2$ ；

$\therefore f(-1) \neq f(1)$ ，该函数不是偶函数， \therefore 该选项错误；

C. $x = -1$ 时， $y = -1$ ； $x = 1$ 时， $y = 1$ ；

$\therefore y = x|x|$ 不是偶函数， \therefore 该选项错误；

D. $y = -|x|$ 定义域为 \mathbf{R} ，且 $f(-x) = -|-x| = -|x| = f(x)$ ；

\therefore 该函数为偶函数；

$x \geq 0$ 时， $y = -|x| = -x$ 为减函数， \therefore 该选项正确.

故选：D.

8. 【答案】C

【解析】由题意可得当 $\sin(\frac{\pi}{6}x + \varphi)$ 取最小值 -1 时，

函数取最小值 $y_{\min} = -3 + k = 2$ ，解得 $k = 5$ ，

$$\therefore y = 3\sin(\frac{\pi}{6}x + \varphi) + 5,$$

\therefore 当 $\sin(\frac{\pi}{6}x + \varphi)$ 取最大值 1 时，

函数取最大值 $y_{\max} = 3 + 5 = 8$ ，

故选：C.

9. 【答案】B

【解析】 $a = \tan 1 > 1$ ， $b = \tan 2 = -\tan(\pi - 2) < 0$ ， $c = \tan 3 = -\tan(\pi - 3) < 0$.

$$\because \frac{\pi}{2} > \pi - 2 > \pi - 3 > 0,$$

$$\therefore \tan(\pi - 2) > \tan(\pi - 3) > 0,$$

$$\therefore -\tan(\pi - 2) < -\tan(\pi - 3) < 0.$$

综上可得, $a > 0 > c > b$.

故选: B.

10. 【答案】 C

【解析】 A、对于函数 $y = f(x) = x$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时,

$$\text{有 } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$\therefore f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \text{ 故不是严格下凸函数.}$$

B、对于函数 $y = f(x) = |x|$, 当 $x_1 \neq x_2 > 0$ 时,

$$\text{有 } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right| = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{|x_1| + |x_2|}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$\therefore f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \text{ 故不是严格下凸函数.}$$

C、对于函数 $y = f(x) = x^2$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时,

$$\text{有 } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4}, \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

显然满足 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, 故是严格下凸函数.

D、对于函数 $y = f(x) = \log_2 x$,

$$\text{有 } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \log_2 \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{1}{2}(\log_2 x_1 + \log_2 x_2) = \log_2 \sqrt{x_1 \cdot x_2},$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \text{ 故不是严格下凸函数.}$$

故选 C.

二、填空题

11. 【答案】 1

$$\because 2 > 0,$$

$$\therefore f(2) = 2^2 - 3 = 1,$$

故答案为: 1.

12. 【答案】 $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$

【解析】 \because 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 4]$,

则由 $0 \leq 2x - 3 \leq 4$, 得 $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$,

\therefore 函数 $f(2x - 3)$ 的定义域是 $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

故答案为: $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

13. 【答案】 $(-\infty, -2]$

【解析】 \because 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x \geq m\}$, 且 $A \subseteq B$,

$\therefore m \leq -2$,

\therefore 实数 m 的取值范围是: $(-\infty, -2]$,

故答案为: $(-\infty, -2]$.

14. 【答案】 四

【解析】 $\because \alpha$ 是第三象限角,

$\therefore 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, 解得 $k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$.

当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $2n\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$, 不满足 $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, 舍去.

当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $2n\pi + \pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \pi + \frac{3\pi}{4}$, 满足 $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$.

则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

故答案为: 四.

15. 【答案】 $\frac{3\sqrt{5}-8}{15}$

【解析】 $\because \sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, α, β 都是第二象限角,

$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{4}{5}$,

$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{5}-8}{15}$.

故答案为: $\frac{3\sqrt{5}-8}{15}$.

16. 【答案】 $y=4^x$, 1024

【解析】 设原有1个病毒;

经过1个30分钟变成 $2=2^1$ 个;

经过2个30分钟变成 $2 \times 2 = 4 = 2^2$ 个;

经过3个30分钟变成 $4 \times 2 = 8 = 2^3$ 个;

经过 $\frac{60x}{30}$ 个30分钟变成 $2^{2x} = 4^x$ 个;

\therefore 病毒个数 y 与时间 x (小时) 的函数关系式为 $y=4^x$;

\therefore 经过5小时, 1个病毒能分裂成 $4^5 = 1024$ 个.

故答案为: $y=4^x$, 1024.