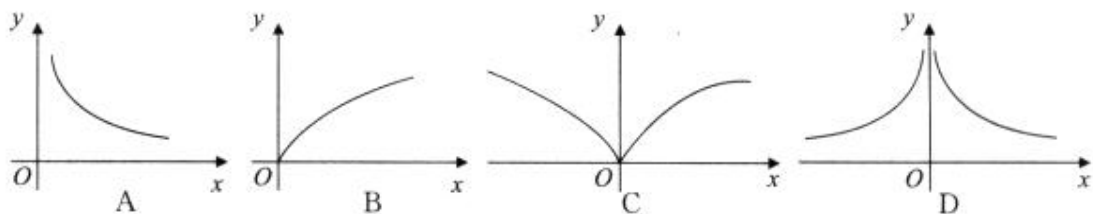


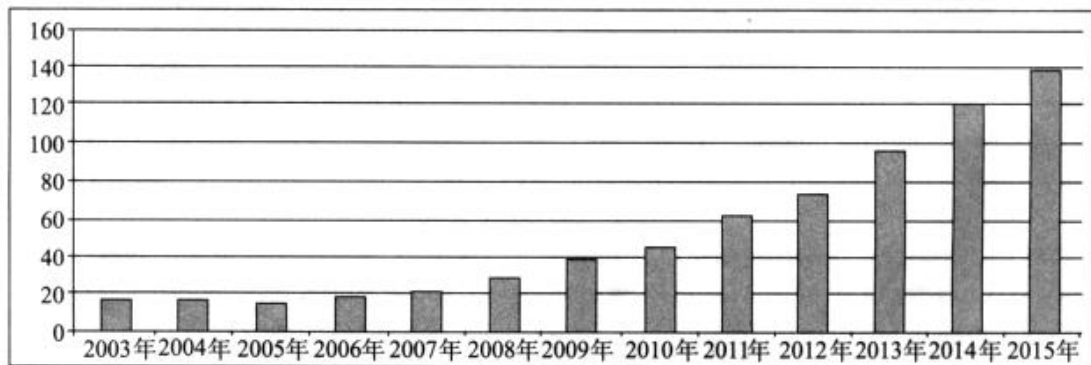
第一部分（选择题 共 24 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项并填在答题卡中。

- 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ，则集合 $A \cup B =$ ()。
A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{0, 1, 2, 3\}$ C. $\{2\}$ D. $\{0, 1, 3\}$
- 若角 α 的终边经过点 $P(1, -2)$ ，则 $\tan \alpha$ 的值为 ()。
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. -2 D. $-\frac{1}{2}$
- 正弦函数 $f(x) = \sin x$ 图象的一条对称轴是 ()。
A. $x=0$ B. $x=\frac{\pi}{4}$ C. $x=\frac{\pi}{2}$ D. $x=\pi$
- 下列函数中，既是偶函数又存在零点的是 ()。
A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = x^2 + 1$
C. $f(x) = \ln x$ D. $f(x) = \cos x$
- 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的大致图象是 ()。



6. 2003年至2015年北京市电影放映场次（单位：万次）的情况如图所示，下列函数模型中，最不适合近似描述这13年间电影放映场次逐年变化规律的是 ()。



- $f(x) = ax^2 + bx + c$
 - $f(x) = ae^x + b$
 - $f(x) = e^{ax+b}$
 - $f(x) = a \ln x + b$
7. 若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称，则 ()。

A. $\alpha + \beta = \pi + k\pi (k \in \mathbf{Z})$

B. $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

C. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$

D. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \in (-\infty, 0) \\ \ln(x+1), & x \in [0, +\infty) \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 4x - 4$, 若存在实数 a , 使得 $f(a) + g(x) = 0$, 则 x

的取值范围为 ().

A. $[-1, 5]$

B. $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

C. $[-1, +\infty)$

D. $(-\infty, 5]$

第二部分 (非选择题 共 76 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请把答案填在相应题目横线上.

9. 函数 $f(x) = \log_2(2x+1)$ 的定义域是_____.

10. $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$ 的值为_____.

11. 已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$, 则 $f(x)$ 的最大值为_____.

12. 若 $a = \log_4 3$, 则 $4^a - 4^{-a} =$ _____.

13. 已知函数 $f(x) = a^x + b (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[-1, 0]$, 则 $a + b =$ _____.

14. 设 S, T 是 \mathbf{R} 的两个非空子集, 如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y = f(x)$ 满足:

(1) $T = \{f(x) | x \in S\}$;

(2) 对任意 $x_1, x_2 \in S$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$.

那么称这两个集合“保序同构”, 现给出以下 4 对集合:

① $S = \{0, 1, 2\}$, $T = \{2, 3\}$;

② $S = \mathbf{N}$, $T = \mathbf{N}^*$;

③ $S = \{x | -1 < x < 3\}$, $T = \{x | -8 < x < 10\}$;

④ $S = \{x | 0 < x < 1\}$, $T = \mathbf{R}$.

其中, “保序同构”的集合对的序号是_____ (写出所有“保序同构”的集合对的序号).



三、解答题：本大题共 6 个小题，共 52 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. （本题满分 8 分）

已知集合 $A = \{0, 1\}$ ， $B = \{x | x^2 - ax = 0\}$ ，且 $A \cup B = A$ ，求实数 a 的值.



16. (本题满分 9 分)

设 θ 为第二象限角, 若 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. 求

(I) $\tan\theta$ 的值;

(II) $\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) + \sin(\pi + 2\theta)$ 的值.



17. (本题满分 9 分)

已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

(I) 证明: $f(x)$ 是奇函数;

(II) 用函数单调性的定义证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

18. (本题满分 9 分)

某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时，列表并填入了部

分数据，如下表：

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

(I) 请将上表数据补充完整，并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式；

(II) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ ($\theta > 0$) 个单位长度，得到 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$

图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ，求 θ 的最小值.



19. （本题满分 9 分）

某食品的保鲜时间 y （单位：小时）与储存温度 x （单位： $^{\circ}\text{C}$ ）满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ （ $e=2.718\ldots$ 为自然对数的底数， k, b 为常数）. 若该食品在 0°C 的保鲜时间为 192 小时，在 22°C 的保鲜时间是 48 小时，求该食品在 33°C 的保鲜时间.

20. (本题满分 8 分)

若实数 x, y, m 满足 $|x - m| > |y - m|$, 则称 x 比 y 远离 m .

(I) 比较 $\log_2 0.6$ 与 $2^{0.6}$ 哪一个远离 0;

(II) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D = \left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 任取 $x \in D$, $f(x)$ 等于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中远离 0 的

那个值, 写出函数 $f(x)$ 的解析式以及 $f(x)$ 的三条基本性质 (结论不要求证明).

北京市东城区 2015—2016 学年上学期高一年级期末考试
数学答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	C	D	A	D	B	A

二、填空题

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$\left\{x \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	$\frac{10}{3}$	$-\frac{3}{2}$	②③④

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 52 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 8 分)

$$\text{解: } \because B = \{x \mid x^2 - ax = 0\}$$

$$\therefore B = \{x \mid x = 0 \text{ 或 } x = a\},$$

由 $A \cup B = A$, 得 $B = \{0\}$ 或 $\{0, 1\}$.

当 $B = \{0\}$ 时, 方程 $x^2 - ax = 0$ 有两个相等实数根 0,

$$\therefore a = 0.$$

当 $B = \{0, 1\}$ 时, 方程 $x^2 - ax = 0$ 有两个实数根 0, 1,

$$\therefore a = 1.$$

16. (本题满分 9 分)

$$\text{解: (I)} \because \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{解得 } \tan \theta = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{(II)} \because \theta \text{ 为第二象限角, } \tan \theta = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) + \sin(\pi + 2\theta) = \cos 2\theta - \sin 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{7}{5}.$$

17. (本题满分 9 分)

证明：（Ⅰ）由已知得，函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$.

设 $x \in D$, 则 $-x \in D$, $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -f(x)$.

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

（Ⅱ）设 x_1, x_2 是 $(0, +\infty)$ 上的两个任意实数, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{x_2^2 - 1}{x_2} - \frac{x_1^2 - 1}{x_1} \\ &= \frac{x_1(x_2^2 - 1) - x_2(x_1^2 - 1)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 + 1)}{x_1 x_2} . \end{aligned}$$

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $x_1 x_2 > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 + 1 > 0$,

所以 $\frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 + 1)}{x_1 x_2} > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

18. (本题满分 9 分)

解：（Ⅰ）根据表中已知数据, 解得 $A = 5$, $\omega = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 数据补全如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$A \sin(\omega x + \varphi)$	0	5	0	-5	0

且函数解析式为 $f(x) = 5 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知, $f(x) = 5 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$, 得 $g(x) = 5 \sin(2x + 2\theta - \frac{\pi}{6})$.

因为 $f(x) = \sin x$ 的图象的对称中心为 $(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$.

令 $2x + 2\theta - \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} - \theta (k \in \mathbf{Z})$.

由于函数 $y = g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 成中心对称, 令 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} - \theta = \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $\theta = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$.

由 $\theta > 0$ 可知, 当 $k=1$ 时, θ 取得最小值 $\frac{\pi}{6}$.

19. (本题满分 9 分)

解: 由题意知,
$$\begin{cases} e^b = 192 \\ e^{22k+b} = 48 \end{cases}$$

$$\therefore e^{22k} = \frac{48}{192} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore e^{11k} = \frac{1}{2}.$$

所以当 $x=33$ 时, $y = e^{33k+b} = (e^{11k})^3 \cdot e^b = \frac{1}{8} \times 192 = 24$.

答: 该食品在 33°C 的保鲜时间为 24 小时.

20. (本题满分 8 分)

解: (I) $|\log_2 0.6 - 0| = |\log_2 0.6| = \log_2 \frac{5}{3}, \quad |2^{0.6} - 0| = |2^{0.6}| = 2^{0.6}.$

$$\because 0 < \log_2 \frac{5}{3} < 1, \quad 1 < 2^{0.6} < 2,$$

$$\therefore \log_2 \frac{5}{3} < 2^{0.6}, \quad \therefore |\log_2 0.6 - 0| < |2^{0.6} - 0|,$$

$\therefore 2^{0.6}$ 比 $\log_2 0.6$ 远离 0.

$$(II) f(x) = \begin{cases} \sin x, x \in (k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}) (k \in \mathbf{Z}) \\ \cos x, x \in (k\pi + \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{5\pi}{4}) (k \in \mathbf{Z}) \end{cases}.$$

$f(x)$ 的性质:

① $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数;

② $f(x)$ 是周期函数, 最小正周期 $T=2\pi$;

③ $f(x)$ 在区间 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], \left[2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right], \left[2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right],$

$\left[2k\pi + \frac{7\pi}{4}, 2k\pi + 2\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ 单调递增,

$f(x)$ 在区间 $\left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right], \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right], \left[2k\pi + \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \pi\right],$

$\left[2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 单调递减;

④ 当 $x=2k\pi$ 或 $x=2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x)$ 有最大值 1,

当 $x=2k\pi + \pi$ 或 $x=2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x)$ 有最小值 -1.

北京市东城区 2015—2016 学年上学期高一年级期末考试
数学试卷部分解析

一、选择题

1. 【答案】B

【解析】 \because 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$.

故选 B.

2. 【答案】C

【解析】 $\because P(1, -2)$,

$$\therefore x=1, y=-2,$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{y}{x} = -2.$$

故选 C.

3. 【答案】C

【解析】 $\because f(x) = \sin x$ 的对称轴方程有

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } x = \frac{\pi}{2}.$$

故选 C.

4. 【答案】D

【解析】 $\because \cos(-x) = \cos x$,

$\therefore y = \cos x$ 是偶函数,

$$\text{令 } \cos x = 0 \text{ 得 } x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{即零点是 } x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}).$$

故选 D.

5. 【答案】A

【解析】 $\because -\frac{1}{2} < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 排除选项 B、C;

又 $\because f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 故排除选项 D.

故选 A.

6. 【答案】D

【解析】根据图象得出单调性的规律, 单调递增, 速度越来越快,

$\because f(x) = ax^2 + bx + c$ ，单调递增，速度越来越快，

$f(x) = ae^x + b$ ，指数型函数增长很快，

$f(x) = e^{ax+b}$ ，指数型函数增长很快，

$f(x) = a \ln x + b$ ，对数型函数增长越来越慢.

\therefore A、B、C 都有可能，D 不可能.

故选 D.

7. 【答案】B

【解析】先考虑 α 、 β 为 $(0, 2\pi]$ 内的角时，

若角 α 和角 β 的终边关于 y 轴对称，则

$$\beta = \pi - \alpha, \text{ 可得 } \alpha + \beta = \pi;$$

若 α 、 β 有一个不在区间 $(0, 2\pi]$ 内时，

根据终边相同角的集合，得

$$\beta = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

整理得： $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

故选 B.

8. 【答案】A

【解析】当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $f(x) = x^2 + 2x \in [-1, +\infty)$ ，

当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x) = \ln(x+1) \in [0, +\infty)$ ，

$$\therefore f(x) \in [-1, +\infty),$$

\therefore 只要 $g(x) \in (-\infty, 1]$ 即可，

$$\therefore (x-2)^2 - 8 \in (-\infty, 1],$$

解得 $b \in [-1, 5]$.

故选 A.

二、填空题

9. 【答案】 $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$

【解析】函数 $f(x) = \log_2(2x+1)$ 的定义域为 $\{x \mid 2x+1 > 0\}$ ，

$$\text{解得 } \left\{x \mid x > -\frac{1}{2}\right\}.$$

$$\text{故答案为: } \left\{x \mid x > -\frac{1}{2}\right\}.$$

10. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$

$$= \sin(80^\circ - 20^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. 【答案】 2

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \because f(x) &= \sin x + \sqrt{3} \cos x \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) \\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$\because x \in \mathbf{R}$,

$\therefore f(x)$ 的最大值为 2.

故答案为: 2.

12. 【答案】 $\frac{10}{3}$

$$\text{【解析】 原式} = 4^{\log_4 3} + 4^{-\log_4 3} = 4^{\log_2 \frac{1}{3^2}} + 4^{-\log_2 \frac{1}{3^2}} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$$

故答案为: $\frac{10}{3}$.

13. 【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x + b$ 在定义域上是增函数,

$$\text{所以 } \begin{cases} 0 = 1 + b \\ a^{-1} + b = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } b = -1, \frac{1}{a} = 0,$$

不符合题意舍去;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x + b$ 在定义域上是减函数,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 + b = -1 \\ \frac{1}{a} + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } b = -2, a = \frac{1}{2},$$

综上 $a + b = -\frac{3}{2}$.

故答案为: $-\frac{3}{2}$.

14. 【答案】 ②③④

【解析】 ① $S = \{0, 1, 2\}$, $T = \{2, 3\}$, 不存在函数 $f(x)$ 使得集合 S , T “保序同构”;

② $S = \mathbf{N}$, $T = \mathbf{N}^*$, 存在函数 $f(x) = x + 1$, 使得集合 S , T “保序同构”;

③ $S = \{x \mid -1 < x < 3\}$, $T = \{x \mid -8 < x < 10\}$, 存在函数 $f(x) = x + 7$, 使得集合 S , T “保序同构”;



④ $S = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $T = \mathbf{R}$, 存在函数 $f(x) = x + 1$, 使得集合 S , T “保序同构”.
其中, “保序同构”的集合对的对应序号是②③④.

故答案为: ②③④.