

数学试卷

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列各组中的两个集合 A 和 B ，表示同一集合的是（ ）。

- A. $A = \{\pi\}$, $B = \{3.14159\}$
 B. $A = \{2, 3\}$, $B = \{(2, 3)\}$
 C. $A = \{x | -1 < x \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{1\}$
 D. $A = \{1, \sqrt{3}, \pi\}$, $B = \{\pi, 1, |-\sqrt{3}|\}$

2. 若 $a > b$, $c \in \mathbf{R}$, 则下列不等式中成立的是（ ）。

- A. $ac > bc$ B. $\frac{a}{b} > 1$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $ac^2 \geq bc^2$

3. 函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ 的一个正数零点附近的函数值用二分法逐次计算，参考数据如下表：

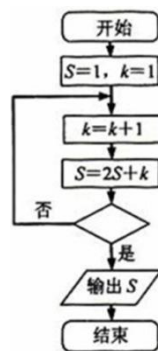
$f(1) = -2$	$f(1.5) = 0.625$
$f(1.25) = -0.984$	$f(1.375) = -0.260$
$f(1.438) = 0.165$	

那么方程 $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ 的一个近似根（精确度 0.1）为（ ）。

- A. 1.2 B. 1.3 C. 1.4 D. 1.5

4. 某程序框图如图所示，若输出的 $S = 57$ ，则判断框内为（ ）。

- A. $k > 4$ B. $k > 5$
 C. $k > 6$ D. $k > 7$



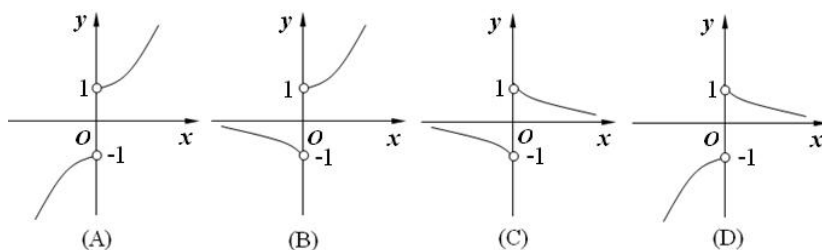
5. 给定函数① $y = x^{\frac{1}{2}}$, ② $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$, ③ $y = |x^2 - 2x|$, ④ $y = (\frac{5}{6})^x$, 其中在区间 $(0, 1)$ 上单调递减的函数序号是（ ）。

- A. ①④ B. ②④ C. ②③ D. ①③

6. 已知 $a = \sqrt{0.3}$, $b = 2^{0.3}$, $c = 0.3^{0.2}$, 则 a , b , c 三者的大小关系是（ ）。

- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$
 C. $a > b > c$ D. $c > b > a$

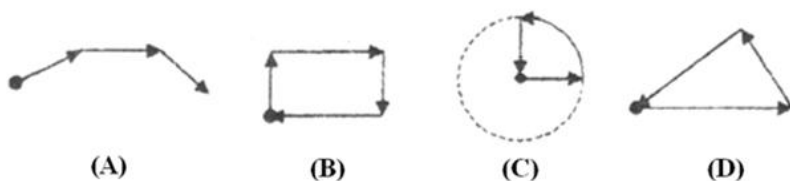
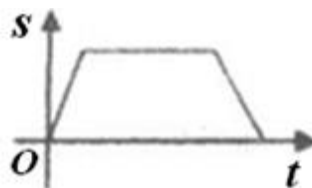
7. 函数 $y = \frac{xa^x}{|x|}$ ($0 < a < 1$) 的图象的大致形状是（ ）。



8. 某苗圃基地为了解基地内甲、乙两块地种植同一种树苗的长势情况，从两块地各随机抽取了10株树苗，用茎叶图表示上述两组树苗高度的数据，对两块地抽取树苗的高度的平均数 $\bar{x}_甲$ ， $\bar{x}_乙$ 和方差进行比较，下面结论正确的是（ ）.

甲					乙				
9	5	3	1	0	1	0			
					2	6			
		7	3	2	3	0	0	4	7
				1	4	4	6	6	7

- A. $\bar{x}_{\text{甲}} > \bar{x}_{\text{乙}}$, 乙地树苗高度比甲地树苗高度更稳定
- B. $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$, 甲地树苗高度比乙地树苗高度更稳定
- C. $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$, 乙地树苗高度比甲地树苗高度更稳定
- D. $\bar{x}_{\text{甲}} > \bar{x}_{\text{乙}}$, 甲地树苗高度比乙地树苗高度更稳定
9. 右图是王老师锻炼时所走的离家距离(S)与行走时间(t)之间的函数关系图, 若用黑点表示王老师家的位置, 则王老师行走的路线可能是().



10. 已知函数 $f(x) = a(x-a)(x+a+3)$, $g(x) = 2^x - 2$, 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 总有 $f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, -4)$ B. $[-4, 0)$
- C. $(-4, 0)$ D. $(-4, +\infty)$

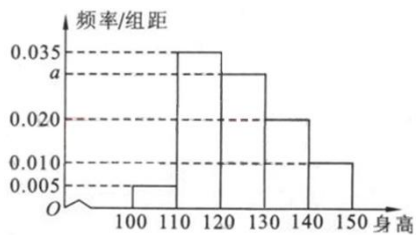
第二部分（非选择题 共 70 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0, \\ 3^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(\frac{1}{4})$ 的值是_____.

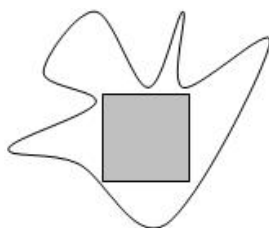
12. 从某小学随机抽取100名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图（如图）。
- 由图中数据可知 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。若要从身高在 $[120, 130)$ ， $[130, 140)$ ， $[140, 150]$ 三组内的学生中，用分层抽样的方法选取18人参加一项活动，则从身高在 $[140, 150]$ 内的学生中选取的人数应

为 .



13. 设 $0 < x < \frac{3}{2}$, 则函数 $y = 4x(3 - 2x)$ 的最大值为_____.

14. 如图, 一不规则区域内, 有一边长为1米的正方形, 向区域内随机地撒1000颗黄豆, 数得落在正方形区域内(含边界)的黄豆数为360颗, 以此实验数据1000为依据可以估计出该不规则图形的面积为_____平方米. (用分数作答)



15. 若函数 $f(x) = \frac{x^2}{(2x+1)(x+a)}$ 的图象关于 y 轴对称, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 关于函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$ 有以下四个命题:

- ①对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(f(x))=1$;
②函数 $f(x)$ 是偶函数;
③若 T 为一个非零有理数, 则 $f(x+T)=f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立;
④在 $f(x)$ 图象上存在三个点 A, B, C , 使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形.
其中正确命题的序号是_____.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分．

17. (本题满分 9 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4x+5-x^2}}{x+1}$ 的定义域为集合 A ，函数 $g(x) = \lg(-x^2 + 2x + m)$ 的定义域为集合 B ．

(I) 当 $m=3$ 时，求 $A \cap C_{\mathbb{R}} B$ ；

(II) 若 $A \cap B = \{x | -1 < x < 4\}$ ，求实数 m 的值．

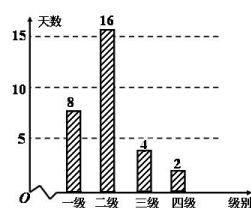
18. (本题满分 9 分)

空气质量指数 $PM_{2.5}$ (单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$) 表示每立方米空气中可入肺颗粒物的含量, 这个值越高, 表示空气污染越严重:

$PM_{2.5}$ 日均浓度	0 ~ 35	35 ~ 75	75 ~ 115	115 ~ 150	150 ~ 250	> 250
空气质量级别	一级	二级	三级	四级	五级	六级
空气质量类别	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染	严重污染

某市 2013 年 3 月 8 日—4 月 7 日(30 天)对空气质量指数 $PM_{2.5}$ 进行检测, 获得数据后整理得到如下条形图:

- (I) 估计该城市一个月内空气质量类别为良的概率;
 (II) 从空气质量级别为三级和四级的数据中任取 2 个, 求至少有一天空气质量类别为中度污染的概率.





19. (本题满分 10 分)

已知定义域为 \mathbf{R} 的单调减函数 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{3} - 2^x$.

(I) 求 $f(0)$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的解析式;

(III) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

20. (本题满分 12 分)

定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ ，如果对任意 $x \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(kx) = k f(x)$ ($k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*$) 成立，则称 $f(x)$ 为 k 阶伸缩函数。

(I) 若函数 $f(x)$ 为二阶伸缩函数，且当 $x \in (1, 2]$ 时， $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{3}} x$ ，求 $f(2\sqrt{3})$ 的值；

(II) 若函数 $f(x)$ 为三阶伸缩函数，且当 $x \in (1, 3]$ 时， $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ ，求证：函数 $y = f(x) - \sqrt{2}x$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点；

(III) 若函数 $f(x)$ 为 k 阶伸缩函数，且当 $x \in (1, k]$ 时， $f(x)$ 的取值范围是 $[0, 1]$ ，求 $f(x)$ 在 $(0, k^{n+1}]$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 上的取值范围。

北京市朝阳区 2015-2016 学年度第一学期期末高一年级统一考试
数学答案

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	C	A	B	A	D	B	C	C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

题号	11	12	13	14	15	16
答案	-2	0.030; 3	$\frac{9}{2}$	$\frac{25}{9}$	$-\frac{1}{2}$	①②③④

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分。

17. 解：（I）由 $f(x) = \frac{\sqrt{4x+5-x^2}}{x+1}$ 的定义域得 $A = \{x | -1 < x \leq 5\}$.

当 $m=3$ 时， $B = \{x | -1 < x < 3\}$,

则 $C_R B = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

所以 $A \cap C_R B = \{x | 3 \leq x \leq 5\}$.

（II）因为 $A = \{x | -1 < x \leq 5\}$, $A \cap B = \{x | -1 < x < 4\}$,

所以有 $-4^2 + 2 \times 4 + m = 0$.

解得 $m=8$.

此时 $B = \{x | -2 < x < 4\}$, 符合题意.

所以 $m=8$.

18. 解：（I）由条形监测图可知，空气质量级别为良的天数为16天，

所以此次监测结果中空气质量为良的概率为 $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$.

（II）样本中空气质量级别为三级的有4天，设其编号为 a, b, c, d ;

样本中空气质量级别为四级的有2天，设其编号为 e, f ,

则基本事件有：

$(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f), (d, e), (d, f), (e, f)$ 共15个.

其中至少有一天空气质量类别为中度污染的情况有：

$(a, e), (b, e), (c, e), (d, e), (a, f), (b, f), (c, f), (d, f), (e, f)$
共9个.

所以至少有一天空气质量类别为中度污染的概率为 $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

19. 解：（I）因为定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(0)=0$.

（II）因为当 $x < 0$ 时， $-x > 0$,

所以 $f(-x) = \frac{-x}{3} - 2^{-x}$.

又因为函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$.

综上, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 2^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x}{3} + 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(t^2 - 2t) < f(k - 2t^2)$. 又 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, 所以 $t^2 - 2t > k - 2t^2$. 即 $3t^2 - 2t - k > 0$ 对任意 $t \in \mathbf{R}$ 恒成立.

则 $g(t) = 3t^2 - 2t = 3(t^2 - \frac{2}{3}t) = 3(t - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} \geqslant -\frac{1}{3}$.

故实数 k 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{3})$.

所以 $f(\sqrt{3})=1+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

所以 $f(2\sqrt{3}) = 2f(\sqrt{3}) = 1$.

注意到 $x \in (1, 3]$ 时, $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$.

令 $f(x) - \sqrt{2}x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 3^m$, 它们均不在 $(3^m, 3^{m+1}]$ 内.

所以函数 $y = f(x) - \sqrt{2}x$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点.

所以当 $x \in (k^n, k^{n+1}]$ 时, $f(x) = k^n f(\frac{x}{k^n})$.

因为 $\frac{x}{k^n} \in (1, k]$, 所以 $f(\frac{x}{k^n}) \in [0, 1)$.

所以当 $x \in (k^n, k^{n+1}]$ 时, $f(x) \in [0, k^n)$.

当 $x \in (0, 1]$ 时, 即 $0 < x \leq 1$,

则 $\exists k (k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*)$ 使 $0 < \frac{1}{k} < x \leq 1$,

$\therefore 1 < kx \leq k$, 即 $kx \in (1, k]$,

$$\therefore f(kx) \in [0, 1) \text{ .}$$



$$\text{又 } f(x) = \frac{1}{k} f(kx),$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{k} f(kx) \in [0, \frac{1}{k}), \text{ 即 } f(x) \in [0, \frac{1}{k}).$$

因为 $k \geq 2$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, k^{n+1}]$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 上的取值范围是 $[0, k^n)$.

北京市朝阳区 2015-2016 学年度第一学期期末高一年级统一考试
数学试卷部分解析
一、选择题

1. 【答案】D

【解析】A: $\because \pi \neq 3.14159$, 故元素不同, 集合也不同, 故排除;

B: $\because A$ 的元素为 2 和 3, 而 B 的元素为一个点 $(2,3)$, 故元素不停, 集合不同, 故排除;

C: 由 $A = \{x | -1 < x \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$ 得, $A = \{0, 1\}$, 故两个集合不同, 故排除;

D: $\because |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, $\therefore B = \{\pi, 1, |-\sqrt{3}|\}$, 根据集合元素的无序性可以判断 $A = B$.

故选 D.

2. 【答案】D

【解析】A: 由于 c 的符号不知道, 当 $c < 0$ 时, 此不等式不成立;

B: 当 $b < 0 < a$ 时, 此不等式无意义;

C: 当 $b < 0 < a$ 时, 此不等式无意义;

D: 因为 $c^2 \geq 0$, 故 $ac^2 \geq bc^2$, 故 D 正确.

故选 D.

3. 【答案】C

【解析】由表中数据结合二分法的定义得零点应该存于区间 $(1.4065, 1.438)$ 中, 观察四个选项, 与其最接近的是 C.

故选 C.

4. 【答案】A

【解析】程序在运行过程中各变量值如下:

KS 是否继续循环

循环前 11/

第一圈 24 是

第二圈 311 是

第三圈 426 是

第四圈 557 否

故推退出循环的条件应为 $k > 4$.

故选 A.

5. 【答案】B

【解析】① $\because y = x^{\frac{1}{2}}$ 为 $[0, +\infty)$ 的增函数, 可排除;

② $\because y = x + 1 (x > -1)$ 为增函数, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 为减函数, 根据复合函数的单调性 (同增异减), 可知正确;

③ $y = |x^2 - 2x|$, 在 $[0, 1]$, $[2, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$ 上单调递减, 可知错误;

④根据指数函数的性质可知正确.

故选 B.

6. 【答案】A

【解析】

$$\because \sqrt{0.3} = 0.3^{\frac{1}{2}} < 0.3^{0.2} < 1 < 2^{0.2},$$

$$\therefore b > c > a.$$

故选 A.

7. 【答案】D

【解析】函数定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$, 且 $y = \frac{xa^x}{|x|} = \begin{cases} a^x, & x > 0 \\ -a^x, & x < 0 \end{cases}$,

当 $x > 0$ 时, 函数是一个指数函数, 其底数 $0 < a < 1$, 所以函数递减;

当 $x < 0$ 时, 函数图象与指数函数 $y = a^x (x < 0)$ 的图象关于 x 轴对称, 函数递增.

故选 D.

8. 【答案】B

【解析】根据茎叶图有:

①甲地树苗高度的平均数为 28cm,

乙地树苗高度的平均数为 35cm,

\therefore 甲地树苗高度的平均数小于乙地树苗高度的平均数;

②甲地树苗高度的中位数为 27cm,

乙地树苗高度的中位数为 35.5cm;

\therefore 甲地树苗高度的中位数小于乙地树苗高度的中位数.

故选 B.

9. 【答案】C

【解析】由已知图形可知, 王老师的行走是:

开始一段时间离家越来越远, 然后有一段时间离家的距离不变, 然后离家越来越近, 只有 C 符合.

故选 C.

10. 【答案】C

【解析】 $\because g(x) = 2^x - 2 < 0$, 得 $x < 1$,

故对 $x \geq 1$ 时, $g(x) < 0$ 不成立,

从而对任意 $x \geq 1$, $f(x) < 0$ 恒成立,

由于 $f(x) = a(x-a)(x+a+3) < 0$, 对任意 $x \geq 1$, 恒成立.

$$\text{则必满足 } \begin{cases} a < 0 \\ x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases}, \text{ 故 } \begin{cases} a < 0 \\ a < 1 \\ -a-3 < 1 \end{cases}.$$

解得 $-4 < a < 0$.

故选 C.

二、填空题

11. 【答案】-2

【解析】 $\because \frac{1}{4} > 0$,

$$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2.$$

故答案为 -2 .

12. 【答案】 0.030 ; 3

【解析】 \because 直方图中各个矩形的面积之和为 1 ,

$$\therefore 10 \times (0.005 + 0.035 + a + 0.02 + 0.01) = 1,$$

解得 $a = 0.030$.

由直方图可得三个区域内的学生总数为

$$100 \times 10 \times (0.03 + 0.02 + 0.01) = 60 \text{ 人}.$$

其中身高在 $[140, 150]$ 内的学生人数为 10 人,

$$\therefore \text{身高在 } [140, 150] \text{ 范围内抽取的学生人数为 } \frac{18}{60} \times 10 = 3 \text{ 人}.$$

故答案为: 0.030 ; 3 .

13. 【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】 $\because 0 < x < \frac{3}{2}$,

$$\therefore 3 - 2x > 0,$$

$$\text{则 } y = 4x(3 - 2x) = 2[2x(3 - 2x)] \leq 2\left(\frac{2x + 3 - 2x}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

故答案为: $\frac{9}{2}$.

14. 【答案】 $\frac{25}{9}$

【解析】 \because 向区域内随机地撒 1000 颗黄豆, 数得落在正方形区域内 (含边界) 的黄豆数为 360 颗,

记“黄豆落在正方形区域内”为事件 A .

$$\therefore P(A) = \frac{360}{1000} = \frac{9}{25} = \frac{S_{\text{正方形}}}{S_{\text{不规则图形}}},$$

$$\therefore \text{不规则图形的面积为 } \frac{25}{9}.$$

故答案为: $\frac{25}{9}$.

15. 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 \because 函数 $f(x) = \frac{x^2}{(2x+1)(x+a)}$ 的图象关于 y 轴对称，

\therefore 函数 $f(x)$ 为偶函数，

$\therefore f(-x) = f(x)$ ，

$$\therefore \frac{(-x)^2}{(-2x+1)(-x+a)} = \frac{x^2}{(2x+1)(x+a)},$$

$\therefore (-2x+1)(-x+a) = (2x+1)(x+a)$.

解得 $a = -\frac{1}{2}$.

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

16. 【答案】①②③④

【解析】①当 $x \in \mathbf{Q}$ 时， $f(f(x)) = f(1) = 1$ ，

当 $x \in \mathbf{C}_{\mathbf{R}} \mathbf{Q}$ 时， $f(f(x)) = f(0) = 0$ ，故正确；

② $\because f(x)$ 的图象关于 y 轴对称， $f(x)$ 为偶函数，故正确；

③ \because 有理数和有理数的和为有理数，有理数和无理数的和为无理数，

\therefore 任取一个不为 0 的有理数 T ， $f(x+T) = f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，故正确；

④取 $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $x_2 = 0$ ， $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，可得

$A(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ 、 $B(0, 1)$ 、 $C(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ ，三点恰好构成等边三角形，故正确.

故答案为：①②③④.