

附录3 最新模拟测试题参考答案和提示

初赛模拟测试题(1)

一、选择题

1.【答案】(B).【理由或提示】如图F3-1,

倒推.

2.【答案】(A).【理由或提示】三根8厘米的小棒可以搭成一个等边三角形,是一个锐角三角形.把其中一根8厘米的小棒换成5厘米的后是一个等腰三角形,顶角由60度变小,还是锐角,所以是等腰锐角三角形.

3.【答案】(A).【理由或提示】计算4个图形阴影部分的面积,图(A): $2 \times \left(\frac{1}{4} \times 1^2 \pi - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi - 1$;图(B): $1 - \left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) = 2 - \frac{1}{2}\pi$;图(C)和图(D)相同: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi = 1 - \frac{1}{4}\pi$,易知:图(A)阴影部分的面积最大.

4.【答案】(D).【理由或提示】分类计数.

用1种颜色染色,则有2种不同的染色方式;

用2种颜色染色,再分类如下计数:

(1)仅1个面是红色,有1种不同的染色方式;

(2)仅2个面是红色,相对和相邻,有2种不同的染色方式;

(3)仅3个面是红色,其中有2个相对,经适当转动,固定为红色上底面和红色下底面,仅有1种不同的染色方式;3个红色面两两相邻,仅有1种不同的染色方式;

(4)有4个红色面,即有2个黄色面,不同染色方式的个数同(2);

(5)有5个红色面,即有1个黄色面,不同染色方式的个数同(1).

共有10种不同的染色方式.

5.【答案】(C).【理由或提示】1至9的和是45,减6等于39,填有6的格子周边有6个格子,1至6的和最小是21.故其周围6个数字的和只能是24,30或36.

为陈述方便,如图F3-2a,在格子中填上代表数字的字母.

现在说明不可能是24.否则, m 和 n 只能填7和8.不妨设 m



图 F3-1

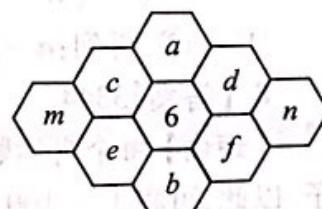


图 F3-2a

$= 7, n = 8, c$ 和 e 只能填 2, 5 或 3, 4 或 5, 9, d 和 f 只能填 3, 5, 此时, 必有数字 3 或 5 在网格中出现 2 次, 不符合要求.

现在说明不可能是 36. 否则, m 和 n 只能填 1 和 2. 不妨设 $m = 1, n = 2$. 此时, 依题目要求, d 和 f 都是偶数或者都是奇数, 但是不可能都是偶数, 否则, 依题目要求, b 需要取偶数, 则网格中出现 5 个偶数, 不可能. 因此 d 和 f 都是奇数. 因为该网格上下对称, 只考虑 b, e, f 取 5 的情况.

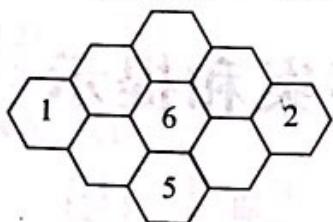


图 F3-2b

b 不可能是 5, 因为在 3, 4, 7, 8, 9 中, 不存在 2 个数与 6 的和是 5 的倍数, 见图 F3-2b;

$e = 5$ 时, c, b 需取 4 和 9, 当 $c = 9$ 时, 依题目要求, a 应当取 6, 不可能; 当 $c = 4, b = 9$ 时, d 应当取 4, 则网格中出现 2 个 4, 不可能, 见图 F3-2c 和 F3-2d.

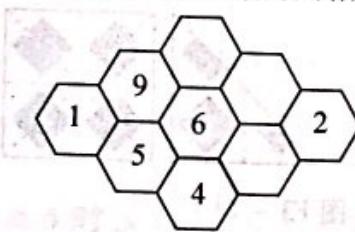


图 F3-2c



图 F3-2d

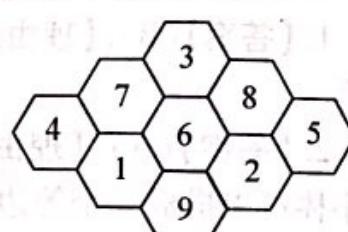


图 F3-2e

同样可以判断 f 不能是 5.

因此, 6 周围格子里的数字之和不等于 36, 图 F3-2e 是 6 周围格子里的数字之和为 30 的一种填法.

6. 【答案】(C). 【理由】分类计数.

二、填空题

7. 【答案】10.5.

【解答】记原一等奖的平均分为 a , 原二等奖的平均分为 b , 一等奖的最后 4 人的平均分是 c , 求 $a - b$ 的值.

调整后, 得一等奖的学生的平均分提高了 3 分, 可以得出一等奖得分前 6 人要补给得分后 4 人 18 分,

$$(4c + 18) \div 4 = a, 4c + 18 = 4a, a - c = 4.5, \quad ①$$

调整后, 得二等奖的学生的平均分提高了 1 分, 一等奖得分后 4 人补给原二等奖 20 分,

$$(4c - 20) \div 4 = b + 1, 4c - 20 = 4b + 4, c - b = 6, \quad ②$$

$$\text{①} + \text{②}, \text{得到: } a - b = 10.5.$$

8. 【答案】3344.

【理由】每个自然数 n 都可以表示为: $n = 2^r g$, 其中 $r \geq 0, g$ 是奇数, 是 n 的最大因子. 以此, 可将 1 ~ 100 的自然数分类:

$r = 0$ 类: $\{1, 3, 5, \dots, 99\}$, 和 $= 1 + 3 + \dots + 99 = 2500$;

$r = 1$ 类: $\{2 \times 1, 2 \times 3, 2 \times 5, \dots, 2 \times 49\}$, 它们奇数因子的和 $= 1 + 3 + \dots$

$+49 = 625$; $r = 2$ 类: $\{2^2 \times 1, 2^2 \times 3, 2^2 \times 5, \dots, 2^2 \times 25\}$, 它们奇数因子的和 $= 1 + 3 + \dots + 25 = 169$;

$r = 3$ 类: $\{2^3 \times 1, 2^3 \times 3, 2^3 \times 5, \dots, 2^3 \times 11\}$, 它们奇数因子的和 $= 1 + 3 + \dots + 11 = 36$;

$r = 4$ 类: $\{2^4 \times 1, 2^4 \times 3, 2^4 \times 5\}$, 它们奇数因子的和 $= 1 + 3 + 5 = 9$;

$r = 5$ 类: $\{2^5 \times 1, 2^5 \times 3\}$, 它们奇数因子的和 $= 1 + 3 = 4$;

$r = 6$ 类: $\{2^6 \times 1\}$, 它们奇数因子的和 $= 1$,

因此, 运动员们在黑板上写下所有数之和是 $1 + 4 + 9 + 36 + 169 + 625 + 2500 = 3344$.

9. [答案] 20.

【理由或提示】 因为 $AB = AD$, 所以 $\angle ADB = \angle ABD$, 又 $\angle ABC - \angle C = 40^\circ$, 即 $\angle ABD + \angle CBD - \angle C = 40^\circ$, 因此, $\angle ADB + \angle CBD - \angle C = 40^\circ$. 又 $\angle CBD + \angle C = \angle ADB$, 因此, $\angle CBD + \angle C + \angle CBD - \angle C = 40^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$.

10. [答案] 8.

【理由或提示】 中间的是 5 厘米, 两头分别是 1 厘米, 2 厘米和 4 厘米, 8 厘米.

如图 F3-3a, 5 把尺子分别记为 A, B, C, D, E, 长度记为 $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|$, $|E|$ 厘米.

共有 15 种组合方式(包括用 1 把尺子的形式):

1 把尺子, 有 5 种: A, B, C, D, E;

2 把尺子, 有 6 种组合: AB, AC, BC, DE, DC, EC;

3 把尺子, 有 4 种组合: ACD, ACE, BCD, BCE.

马上得到: ① 5 把尺子的长度均不相同; ② 仅有唯一的方式组合出一把 1 至 15 厘米的尺子.

则可知: 必有长度为 1 厘米和 2 厘米的尺子, 且最长的尺子不小于 6 厘米.

若最长的尺子长为 6 厘米, 为能组合出长为 15 厘米的尺子, 必有 4 厘米长和 5 厘米长的尺子, 此时, 用长为 1 厘米、2 厘米、4 厘米、5 厘米和 6 厘米的尺子无法组合出长为 14 厘米的尺子.

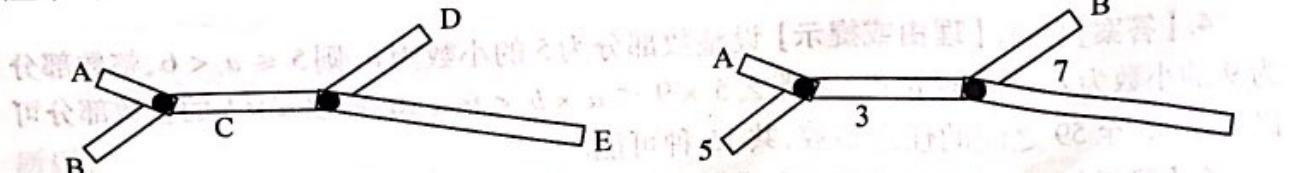


图 F3-3a

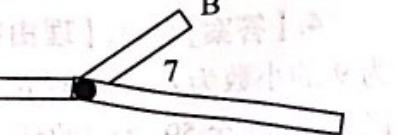


图 F3-3b

若最长的尺子长为 7 厘米, 为能组合出长为 15 厘米和 4 厘米的尺子, 5 把尺子的长度有 3 类:

(1) 5 把尺子的长度为 1 厘米、2 厘米、3 厘米、5 厘米和 7 厘米, 只有 $3 + 5 + 7 = 15$, 如果 $|C| = 3$, 则不能组合出长为 13 厘米的尺子, 见图 F3-3b; 如果 $|C| = 5$, 则不能组

合出长为11厘米的尺子;如果 $|C|=7$,则可以用2种方式组合出长度为10厘米的尺子,与②矛盾.

(2)5 把尺子的长度为1厘米、2厘米、3厘米、6厘米和7厘米,只有 $2+6+7=15$,因此, $|C|\neq 1,3$,且 $1+3=4$,所以,长为1厘米和3厘米的两把尺子在C尺的同一端,不能组合出长为15厘米的尺子.

(3)5 把尺子中的长度为1厘米、2厘米、4厘米、6厘米和7厘米,此时,必有 $|C|=2$,

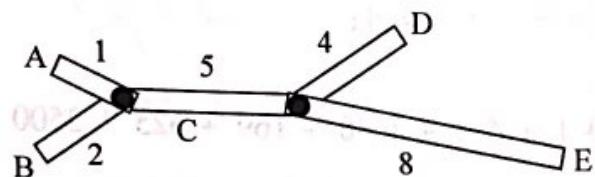


图 F3 - 3c

且可以用两种方式组合出长为7厘米的尺子,与②矛盾.

因此,最长的尺子长不小于8厘米,图F3-3c表示,最长的尺子是8厘米,中间的是5厘米,两头分别是1厘米、2厘米和4厘米、8厘米.

初赛模拟测试题(2)

一、选择题

1.【答案】(C).【理由或提示】用 $A > B$ 表示A的排名高于B.那么根据题目条件,C相对于A和B的位置有3种可能:

(1) $C > A > B$,此时,D的位置有3种可能: $D > A, A > D > B, B > D$;

(2) $A > C > B$,此时,D的位置有2种可能: $D > B, B > D$;

(3) $A > B > C$,此时,D的位置有1种可能.

总的可能情况有 $3+2+1=6$ (种).

2.【答案】(B).【理由或提示】这列数为 $2016, 21, 12, 6, 9, 15, 15, 12, 9, 12, 12, 6, 9, 15, 15, 12, 9, \dots$,从 a_4 开始每8个数一循环. $2016 = 3 + 8 \times 251 + 5$,所以, $a_{2016} = a_8 = 12$.

3.【答案】(B).【理由或提示】设A盒子中单个小球重量为1,B盒子中单个小球重量为 k .根据题目,可以判断 $k \geq 1$ (A盒子小球比B盒子小球轻).则有

$$40k - 50 = 10k + 10,$$

解方程得 $k = 2$.

4.【答案】(C).【理由或提示】设整数部分为5的小数为 a ,则 $5 \leq a < 6$,整数部分为9的小数为 b ,则 $9 \leq b < 10$,那么 $5 \times 9 \leq a \times b < 6 \times 10$,所以 $a \times b$ 的整数部分可以等于45至59之间的任意整数,共15种可能.

5.【答案】(A).【理由或提示】设长、宽、高分别为 a, b, c ,且 $a \geq b \geq c$.分解 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$,则 a 的最大取值为45,此时 $b = c = 2, a + b + c = 49$.不难验证, a 取其他值时, $a + b + c \leq 35$.

6.【答案】(D).【理由或提示】

$$\begin{aligned}\angle CAF &= \angle AFB - \angle ACB \\ &= (180^\circ - \angle ABC - \angle BAF) - \angle ACB\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (180^\circ - \angle ABC - \angle ABD) - \angle ACB \\
 &= (180^\circ - \angle ABC - \angle ADB) - \angle ACB \\
 &= 180^\circ - \angle ABC - \frac{(\angle ABC + \angle ACB)}{2} - \angle ACB \\
 &= 180^\circ - 76^\circ - \frac{(76^\circ + 38^\circ)}{2} - 38^\circ = 9^\circ.
 \end{aligned}$$

二、填空题

7. 【答案】777776.56.

【理由或提示】

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 777777 - (0.4 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + 0.00004) \\
 &= 777777 - 0.444444 = 777776.555556 \approx 777776.56.
 \end{aligned}$$

8. 【答案】725.

【理由或提示】假设小明享受了 k 次满 100 减 10 的优惠，则他购买的书会员价为 $(195 - k \times 10) \times \frac{0.8}{0.2}$ ，那么 $k \times 100 \leq (195 - k \times 10) \times \frac{0.8}{0.2} < (k+1) \times 100$ ，解得：

$$4.86 \approx \frac{680}{140} < k \leq \frac{780}{140} \approx 5.57，\text{所以 } k = 5。书的原价为 \frac{195 - 5 \times 10}{0.2} = 725(\text{元})。$$

9. 【答案】985656565.

【理由或提示】设首两位数字为 99，99 除以 7 余 1，除以 5 余 4，因此首两位数字最大的可能是 98. 设第 2、第 3 位数字为 89，89 除以 7 余 5，除以 5 余 4，因此第 2、第 3 位数字的可能是 85. 依此类推，可以得到最大的九位数是 985656565.

10. 【答案】 $\frac{1}{48}$.

【理由或提示】如图 F3-4，连接 DE ， CH 和 AH . 因为 D 为 AB 的中点， E 为 AC 的中点，所以

$$S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}，$$

$$S_{\triangle ADG} = S_{\triangle BDG}，$$

$$S_{\triangle AEG} = S_{\triangle CEG}，$$

$$S_{\triangle BDG} = S_{\triangle CEG} = \frac{1}{2} - S_{\triangle BCG}，$$

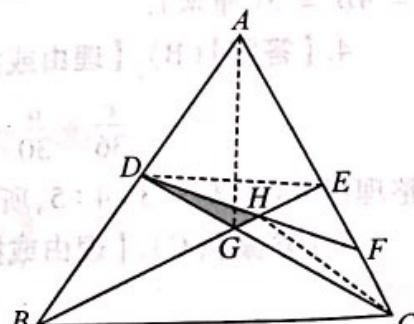


图 F3-4

所以，

$$S_{\triangle CEG} = \frac{1}{6}，$$

$$S_{\triangle DEG} = S_{\triangle CDE} - S_{\triangle CEG}$$

$$= \frac{1}{2}S_{\triangle ACD} - S_{\triangle CEG} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

因为 $S_{\triangle DCF} = S_{\triangle DEF}$, $S_{\triangle HCF} = S_{\triangle HEF}$, 所以,

$$S_{\triangle DEH} = S_{\triangle DCH} = S_{\triangle DGH} + S_{\triangle CGH}$$

由共边定理:

$$\frac{S_{\triangle DGH}}{S_{\triangle DEG}} = \frac{S_{\triangle CGH}}{S_{\triangle CEG}} = \frac{GH}{GE},$$

$$\frac{S_{\triangle DGH}}{\frac{1}{12}} = \frac{S_{\triangle CGH}}{\frac{1}{6}} = \frac{S_{\triangle DEH} - S_{\triangle DGH}}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{12} - 2S_{\triangle DGH}}{\frac{1}{6}},$$

$$\text{解得: } S_{\triangle DGH} = \frac{1}{48}.$$

初赛模拟测试题(3)

一、选择题

1. 【答案】(A).【理由或提示】设环形路长为 M 米, 则甲、乙相遇 1 次所需时间是: $\frac{M}{5+7} = \frac{M}{12}$ (秒), 所以 $14 \times 60 \div \frac{M}{12} = 21$, 因此, $M = 480$.

2. 【答案】(C).【理由或提示】因为 $1729 = 12 \times 12 \times 12 + 1$, 所以, 至少 2 人出生在同一个月、同一个时辰, 且有相同的生肖.

3. 【答案】(D).【理由或提示】因为 $\angle ABC = 85^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle DBC = 20^\circ$, 所以, $\angle ABD = 85^\circ - 20^\circ = 65^\circ$, $\angle ADB = \angle DBC + \angle ACB = 20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$. 得到 $AD = AB = 5$ (厘米).

4. 【答案】(B).【理由或提示】设三边长分别为 c, a, b , 则

$$\frac{c}{36} + \frac{a}{30} + \frac{b}{45} = \frac{c}{45} + \frac{a}{45} + \frac{b}{30} = \frac{c}{30} + \frac{a}{60} + \frac{b}{36},$$

整理得 $a : c : b = 3 : 4 : 5$, 所以 $\angle ABC$ 的度数是 90 度.

5. 【答案】(C).【理由或提示】在四边形 $ABED$ 中, 由共边定理, 可知

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ADF}} = \frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle DEF}},$$

因为 E 是 CD 的中点, 因此,

$$\frac{\frac{1}{2} \times 30^2 - S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ADF}} = \frac{\frac{1}{4} \times 30^2 - S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DEF}},$$

可以得到: $\frac{EF}{AF} = \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ADF}} = \frac{1}{2}$. 又有 $DE : AB = 1 : 2$, 所以, 三角形 DEF 的面积是三角形 ADE 面积的三分之一. 三角形 ADE 的面积 $= 30 \times 30 \div 4 = 225$ (平方厘米), 三角形 DEF 的面积 $= 225 \div 3 = 75$ (平方厘米). 同理, 三角形 ECG 的面积也是 75 平方厘米, 阴影部分的面积是正方形面积的四分之一减去三角形 DEF 与三角形 ECG 的面积和, 即为:

$$30 \times 30 \div 4 - (75 + 75) = 75 \text{ (平方厘米)}.$$

6. 【答案】(A). 【理由或提示】

解法一：这一批种蛋的孵化收益损失 $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$ (倍)；若是全部孵化失败，则要损失 $2\frac{1}{2} + 1 = 3\frac{1}{2}$ (倍)，所以这批种蛋的孵化率是：

$$\left(1 - 1\frac{1}{4} \div 3\frac{1}{2}\right) \times 100\% = \frac{9}{14} \times 100\% = 64.3\%.$$

解法二：假设每个种蛋的成本价为 1 元，100 个种蛋总成本价 100 元。又设 100 个种蛋有 S 个孵化出来，则孵化出后可卖 $S\left(2\frac{1}{2} + 1\right)$ 元。于是 $S\left(2\frac{1}{2} + 1\right) \div 100 = 1\frac{1}{4} + 1$ ，因此，这批种蛋的孵化率是 $\frac{9}{14} \times 100\% = 64.3\%$ 。

二、填空题

7. 【答案】38.

【理由或提示】一个多边形被分成两部分，其内角和增加 360° ，切 k 次共增加的度数为 $k \times 360^\circ$ ，所以这 $(k+1)$ 个多边形的度数和是 $k \times 360^\circ + 540^\circ$ 。另一方面，20 个五边形的度数和为 $20 \times 540^\circ$ ，剩余的 $(k-19)$ 个多边形的度数和最小是 $(k-19) \times 180^\circ$ ，这样得到 $(k-19) \times 180^\circ + 20 \times 540^\circ \leq k \times 360^\circ + 540^\circ$ ，整理得 $k \geq 38$ 。当 $k = 38$ 时，可以先将五边形切成一个五边形和一个四边形，然后用 18 次将四边形分成 19 个四边形，再用 19 次将每个四边形切成五边形，这样就用 38 次将其切成了 20 个五边形。

8. 【答案】450.375.

【理由或提示】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 281 + 365 + 704 - 185 - 161 - 554 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} \\ &= 450 + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} \\ &= 450 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) \\ &= 450 + 0.375 = 450.375. \end{aligned}$$

9. 【答案】194.4.

【理由或提示】设甲地和乙地之间的距离为 S 千米，于是，

$$\frac{\frac{S}{3}}{18} + \frac{\frac{2S}{3}}{8} = \frac{\frac{2S}{3}}{18} + \frac{\frac{S}{3}}{8} + 4.5,$$

化简得：

$$\frac{S}{54} + \frac{2S}{24} = \frac{2S}{54} + \frac{S}{24} + 4.5,$$

$$\frac{S}{24} - \frac{S}{54} = 4.5,$$

$$S = 194.4.$$

10.【答案】48.【理由或提示】

解法一:因数分解 $2016 = 14 \times 12^2$. 因此, 只要考虑满足 $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{14}$ 的正整数 a_1 , b_1 就可以了. 为此, 考虑恒等式:

$$\left(\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} \right) \frac{1}{14} = \frac{1}{m+n} \left(\frac{m}{14} + \frac{n}{14} \right) = \frac{1}{14},$$

可以任取 m, n 为 14 的因数, 且 $(m, n) = 1$, 即可得解. 因此, 正整数对 (m, n) 可取 $(1, 2), (1, 7), (1, 14), (2, 7)$ 这 4 组, 其中只有 $(1, 7)$ 对应我们要求的解. 因为

$$\frac{1}{14} = \frac{1}{1+7} \left(\frac{1}{14} + \frac{7}{14} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{112} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{112}.$$

从而原来的方程的解就是:

$$a^2 = 4^2 \times 12^2 = 48^2, \text{ 即 } a = 48.$$

解法二: 设 $a^2 = dm, b = dn$, 这里 $(m, n) = 1$. 则有:

$$\frac{1}{dm} + \frac{1}{dn} = \frac{n+m}{dmn} = \frac{1}{2016}.$$

因为 $(m, m+n) = 1, (n, m+n) = 1$, 可再设 $d = k(m+n)$, 则有:

$$a^2 = k(m+n)m, b = k(m+n)n, kmn = 2016.$$

$$a^2 = k(m+n)m = km^2 + 2016 = \left(\frac{m+n}{n} \right) \times 2^5 \times 3^2 \times 7, \text{ 这里 } m, n | 2^5 \times 3^2 \times 7.$$

上述式子表示要寻找 m, n , 使 $\left(\frac{m+n}{n} \right) \times 2^5 \times 3^2 \times 7$ 是完全平方数.

(1) 当 $n = 1$ 时, $\left(\frac{m+n}{n} \right) \times 2^5 \times 3^2 \times 7 = (m+1) \times 2^5 \times 3^2 \times 7, m$ 无解;

(2) 当 $n = 7$ 时, $\left(\frac{m+n}{n} \right) \times 2^5 \times 3^2 \times 7 = (m+7) \times 2^5 \times 3^2, m = 1$, 此时, $a^2 = 48^2$;

(3) 当 $n = 7 \times 3^k (k = 1, 2)$ 时, $\left(\frac{m+n}{n} \right) \times 2^5 \times 3^2 \times 7 = (m+7 \times 3^k) \times 2^5 \times 3^{2-k}$,

$m = 2^p (p = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, 显然, $(2^p + 7 \times 3^k)$ 无因子 2, m 无解;

(4) 当 $n = 7 \times 2^p (p = 1, 2, 3, 4, 5)$ 时, $\left(\frac{m+n}{n} \right) \times 2^5 \times 3^2 \times 7 = (3^k + 7 \times 2^p) \times 2^{5-p} \times 3^{2-k}$

$\times 3^2$ 不是完全平方数, 即 m 无解;

(5) 当 $n = 2^p \times 3^k (k = 0, 1, 2; p = 0, 1, 2, 3, 4, 5; p+k \neq 0)$ 时,

$\left(\frac{m+n}{n} \right) \times 2^5 \times 3^2 \times 7 = (7 + 3^k \times 2^p) \times 2^{5-p} \times 3^{2-k} \times 7, 7 + 3^k \times 2^p$ 无因子 7, m

无解;

(6) 当 $n = 7 \times 2^p \times 3^k (k = 1, 2; p = 1, 2, 3, 4, 5)$ 时, $m = 1$

$\left(\frac{m+n}{n} \right) \times 2^5 \times 3^2 \times 7 = (1 + 7 \times 3^k \times 2^p) \times 2^{5-p} \times 3^{2-k}$, 当 $2^{5-p} \times 3^{2-k}$ 是完全平方

数时, $1 + 7 \times 3^k \times 2^p$ 不是完全平方数, 当 $2^{5-p} \times 3^{2-k}$ 不是完全平方数时, $1 + 7 \times 3^k \times 2^p$ 无因子 2 和 3.

【说明和评注】 第 1 种解答虽然简单, 但是隐含了 $\frac{a}{12}$ 和 $\frac{b}{12^2}$ 是整数的假定.

决赛模拟测试题(1)

一、填空题

1. 【答案】一.

【理由】 注意 2016 年是闰年. 1 月 25 日至 1 月 31 日共 $31 - 25 + 1 = 7$ (天); 2 月至 6 月共 $29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 151$ (天); 7 月 1 日至 7 月 18 日共 18 天. 故 2016 年 1 月 25 日至 7 月 18 日共 $7 + 151 + 18 = 176$ (天). $176 \div 7 = 25 \dots\dots 1$, 故 2016 年 1 月 24 日之后第 176 天为星期一.

2. 【答案】 $\frac{2}{9}$.

$$\begin{aligned}\text{【理由】原式} &= \left[\frac{3}{4} - \left(4 + \frac{4}{9} - 3 - \frac{6}{9} \right) \times \frac{1}{4} \right] \times \left[\left(2 \frac{1}{2} + 1 \frac{2}{3} \right) \div 2 \frac{1}{2} - 1 - \frac{4}{15} \right] \\&= \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{9} \times \frac{1}{4} \right) \times \left(1 + \frac{5}{3} \div \frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{15} \right) \\&= \left(3 - \frac{7}{9} \right) \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{15} \right) \\&= \frac{20}{9} \times \frac{1}{4} \times \frac{6}{15} \\&= \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

3. 【答案】100.

【理由】 设圆柱体的高为 h , 底面圆的半径为 r . 则 $2\pi rh = 314$, $rh = 50$. 增加面积为 $2rh = 100$ (平方厘米).

4. 【答案】 $(4 \times 4 - 4) \div 4 = 3$.

【理由】 三个 4 很容易得到 3, 即 $4 - 4 \div 4 = 3$. 将除以 4 看成乘以 $1/4$, 利用乘法分配律可将 3 个 4 变为 4 个 4, 即 $4 - 4 \div 4 = (4 \times 4 - 4) \div 4$.

5. 【答案】(1, 65).

【理由】 第 1 斜行有 1 个数: 1; 第 2 斜行有 2 个数: 2, 3; …; 第 k 斜行有 k 个数. 前 k 斜行共有 $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (个) 数. 前 65 斜行共有 $\frac{63 \times 64}{2} = 2016$ (个) 数.

其中最大的 2016 位于第 65 斜行最上方, 位置是(1, 65).

6. 【答案】2376.

【理由】 设三个数中的最大者为 $13N$, 则三个连续自然数是 $13N - 2, 13N - 1$, 且 $13N$

$$= 7m + 2 = 11n + 1.$$

(1) 对于 $13N = 7m + 2$, $N = 5 + 7k$;

(2) 对于 $13 \times (5 + 7k) = 11n + 1$,

$$\begin{aligned} 65 + 13 \times 7k &= 11n + 1, \\ 65 + 11 \times 8k + 3k &= 11n + 1, \\ 10 + 3k &= 11 \times (n - 8k - 5) + 1, \\ 3k &= 11 \times (n - 8k - 7) - 9, \\ k &= 8 + 11m, \\ N &= 5 + 7k = 5 + 7 \times (8 + 11m) = 7 \times 11m + 61. \end{aligned}$$

所以, $13N = 13 \times 61 + 7 \times 11 \times 13m = 793 + 7 \times 11 \times 13m$.

这三个数的和最小为 $791 + 792 + 793 = 2376$.

7. 【答案】10.

【理由】该几何体共三层. 下层至多6个小正方体, 中层至多3个, 上层恰为1个. 故搭成这个几何体的小正方体的个数至多是10个.

8. 【答案】16.

【理由】4名同学集合的过程即水平方向上到达同一列, 坚直方向上到达同一行. 水平方向上看, 应集合于C点所在列与D点所在列之间(含); 坚直方向上看, 应集合于B点所在行与C点所在行之间(含). 上述区域中, 共有 $4 \times 4 = 16$ (个) 十字路口.

二、简答题

9. 【解答】甲有必胜策略. 甲的必胜策略如下, 第一步向上移动1016步; 然后甲一直按照如下策略移动: 若乙向上移动n步, 则甲向右移动n步; 若乙向右移动m步, 则甲向上移动m步. 必胜理由如下: 1000×2016 的方格表, 从左下角方格开始移动, 当且仅当一共向右移动999步且向上移动2015步后, 接下来的移动者无法移动棋子, 输掉比赛. 故甲先向上移动 $2015 - 999 = 1016$ 步后, 还可以向右移动999步, 向上移动999步. 接下来, 按照甲选择的移动策略, 每次乙、甲移动后, 还可以向右、向上移动的步数始终减少量相同. 经过若干次移动后, 还可以向右、向上移动的步数将同时变为0, 且此时轮到乙移动棋子. 由于已无法移动棋子, 故乙输掉比赛, 甲胜.

10. 【解答】(1) 长方形的平移速度为 $12 \div 2 \div 3 = 2$ (厘米/秒); 6秒时, 重叠面积达到最大值, 为 $2 \times 6 \times 3 = 36$ (平方厘米). 故重叠面积不可以为40平方厘米.

(2) 重叠面积尚未达到最大值之前, 可以为30平方厘米, 此时长方形平移了 $30 \div 2 = 15$ (秒). 重叠面积达到最大值之后, 当长方形逐步离开正方形时, 也可以为30平方厘米, 此时长方形平移了 $[24 + (36 \div 3 - 30 \div 3)] \div 2 = 13$ (秒).

11. 【解答】有2种填法.

设这句话里有a个数大于1, 有b个数大于2, 有c个数大于3, 有d个数大于4.

注意1, 2, 3, 4中有3个数大于1, 有2个数大于2, 有1个数大于3, 有0个数大于4.

故至少有4个数大于1, 至多有3个数大于4, 即

$$\begin{cases} 7 \geq a \geq 4 \\ 6 \geq b \geq 2 \\ 5 \geq c \geq 1 \\ 3 \geq d \geq 0 \end{cases}, b \text{ 是大于1的数, } a \text{ 是大于3的数, 调整左边不等式组, 所以}$$

$$\begin{cases} 7 \geq a \geq 5 \\ 6 \geq b \geq 3 \\ 5 \geq c \geq 2 \\ 3 \geq d \geq 0 \end{cases}$$

所以,

$$\begin{cases} 7 \geq a \geq 6 \\ 6 \geq b \geq 4 \\ 5 \geq c \geq 2 \\ 3 \geq d \geq 1 \end{cases}$$

所以,

$$\begin{cases} 7 \geq a \geq 6 \\ 6 \geq b \geq 4 \\ 5 \geq c \geq 3 \\ 3 \geq d \geq 1 \end{cases}$$

所以,

$$\begin{cases} 7 \geq a \geq 6 \\ 6 \geq b \geq 5 \\ 5 \geq c \geq 3 \\ 3 \geq d \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7 \\ 6 \geq b \geq 5 \\ 4 \geq c \geq 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

经检验, $a = 7, b = 5, c = 3$ 或 $a = 7, b = 5, c = 4, d = 2$ 符合题意. 共有 2 种填法可使得该句话是正确的.

12. 【解答】最后一行的数为 5502024.

(1) 由图 F3 - 5 可知, 若某一行是等差数列, 则其上面的第一行也是等差数列, 从而上面的每一行均为等差数列.

$$4a-4d \quad 4a \quad 4a+4d$$

$$2a-3d \quad 2a-d \quad 2a+d \quad 2a+3d$$

$$a-2d \quad a-d \quad a \quad a+d \quad a+2d$$

图 F3 - 5

(2) 由图 F3 - 5 可知, 若某行是等差数列, 则将该等差数列去掉首尾两项后的每一项乘以 4, 即为该行上面的第二行.

(3) 1, 2, 3, 4, ..., 20 上面的第一行为 3, 5, 7, 9, ..., 39, 共 19 个数, 其正中间的一个

数为 $(3 + 39) \div 2 = 21$. 再往上两行, 该行共 17 个数, 正中间为 21×4 ; 再往上两行, 该行共 15 个数, 正中间为 21×4^2 ; 再往上两行, 该行共 13 个数, 正中间为 21×4^3 ; ...; 再往上两行至最后一行, 该行共 1 个数, 为 $21 \times 4^9 = 5505024$.

三、详答题

13. 【解答】甲船已航行 24 千米.

设水速为 v . 调头前, 甲船与掉落物品的分开速度为 $v + v = 2v$; 调头后, 甲船与掉落物品的靠近速度为 $4v - v = 3v$; 又两者分开的距离, 即为两者靠近的距离. 故两者分开的时间: 两者靠近的时间 = 3:2, 分别设为 $3t, 2t$. 掉落物品与乙船的路程之和为 $v \cdot 5t + 2v \cdot 5t = 120$, 所以 $v \cdot t = 8$ (千米). 当甲船调头时, 甲船已航行 $v \cdot 3t = 24$ (千米).

14. 【解答】不能.

假设可以. 因为 $0, 1, 2, 3, \dots, 17, 18$ 中任意两数之差只能是 $1, 2, 3, \dots, 17, 18$; 图中 18 条线段需要 18 个互不相同的差. 所以这 18 个差恰好为 $1, 2, 3, \dots, 17, 18$. 这 18 个差的和为 $1 + 2 + 3 + \dots + 17 + 18 = 171$. 另一方面, 由于每个圆圈由偶数条线段连接, 圆圈中的数均做了偶数次差, 故所有差之和为偶数, 矛盾. 假设不成立, 不能选出符合条件的数.

决赛模拟测试题(2)

一、填空题

1. 【答案】1.

【理由或提示】 $n = 3^{21} \times 7^{32} \times 13^3 \equiv 3^{24} \times 7^{24} \times 7^8 \equiv 21^{24} \times 7^8 \equiv 1 \pmod{10}$.

2. 【答案】16.

【理由或提示】设最大的四分之一圆的半径为 r , 则大正方形的边长为 $2r$. 于是阴影部分的面积为:

$$3\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right) + 3\frac{r^2}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{r^2}{4}\pi + \frac{r^2}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{r^2}{16}\pi = \left(4 - \frac{29}{32}\pi\right)r^2 = \left(4 - \frac{58}{64}\pi\right)r^2,$$
$$\left(4 - \frac{58}{64}\pi\right)r^2 = \frac{73.88}{64}r^2 = 73.88, r = 8.$$

故大正方形的边长为 16.

3. 【答案】11.

【理由或提示】假设甲、乙、丙三组每人都发 2 支铅笔, 则共发铅笔 60 支, 现在甲、乙两组每人发 2 支铅笔, 丙组每人发 3 支铅笔, 共发 72 支铅笔, 可见, 丙组有: $72 - 60 = 12$ (人). 假设甲、乙、丙三组每人都发 4 本小人书, 则共发小人书: $30 \times 4 = 120$ (本), 而甲组每人发 3 本小人书, 乙组和丙组每人发 4 本小人书, 共发 113 本小人书. 可见, 甲组有: $120 - 113 = 7$ (人). 于是, 乙组有: $30 - 12 - 7 = 11$ (人).

4. 【答案】98.

【理由或提示】设十位数字为 x , 个位数字为 y . 依题意得方程:

$$3 \times (10x + y - 2) = 4xy, \text{ 整理得: } (4x - 3)y = 6 \times (5x - 1). \quad (*)$$

$4x - 3$ 是奇数, 由此可知 y 为偶数. 且 $y = 6 \times \frac{5x - 1}{4x - 3} > 6$, 所以, $y = 8$. 代入方程 $(*)$, 得到 $x = 9$. 验算, 正确.

5.【答案】4.8.

【理由或提示】如图 F3-6, 将原图补成一个长方形, 则 MN 分成的两部分的面积相等, 由 a, b 两块的面积和是 c, d 两块面积和的 1.5 倍可知, 长方形 e 的面积为 a, b 两块面积和的 $\frac{1}{3}$. 设长方形的宽为 x 厘米, 则有:

$$\frac{1}{2}x \times (2 + 5) \times \frac{1}{3} = (x - 2) \times 2,$$

解得: $x = 4.8$.

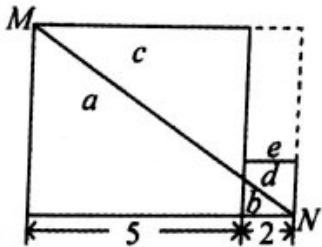


图 F3-6

6.【答案】75.

【理由或提示】不妨设容器 A 的容量为 1 立方米, 其中的 $PM_{2.5}$ 的值是 150 微克 / 立方米, 即空气中 150 微克有害细小颗粒物. 加入容器 B 中的洁净空气后, $PM_{2.5}$ 的值降为 100 微克 / 立方米, 所以容器 B 中有 0.5 立方米洁净空气. 如果再混合与容器 B 中同样多的洁净空气, $PM_{2.5}$ 的值为 $150 \times 1 \div (1 + 0.5 \times 2) = 75$ (微克 / 立方米).

7.【答案】752.

【理由或提示】先从 8 个数中任意取 4 个不同的数, 并分到左右两侧, 每侧两个数, 共有: $C_8^4 \times C_4^2 = 420$ (种) 分法.

相等的分法可枚举得出: $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, 有 2 种分法; $6 = 1 + 5 = 2 + 4$, 有 2(种) 分法; $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$, 有 $3 \times 2 = 6$ (种) 分法; $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$, 有 $3 \times 2 = 6$ (种) 分法; $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$, 有 $6 \times 2 = 12$ (种) 分法; $10 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$, 有 $3 \times 2 = 6$ (种) 分法; $11 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$, 有 $3 \times 2 = 6$ (种) 分法; $12 = 4 + 8 = 5 + 7$, 有 2(种) 分法; $13 = 5 + 8 = 6 + 7$, 有 2(种) 分法, 共有 $2 \times 4 + 6 \times 4 + 12 = 44$ (种) 分法, 则不相等的共有 $420 - (2 \times 4 + 6 \times 4 + 12) = 376$ (种) 分法.

每一种分法有 4 种不同的填法, 满足不等式的有一半, 所以共有 752 种不同的填法使式子成立.

8.【答案】10.

【理由或提示】设宣布 5 的人选择的数是 x , 则宣布 3 的人选择的数是 $8 - x$, 则宣布 1 的人选择的数是 $4 - (8 - x) = x - 4$, 则宣布 9 的人选择的数是 $20 - (x - 4) = 24 - x$, 则宣布 7 的人选择的数是 $16 - (24 - x) = x - 8$, 则宣布 5 的人选择的数是 $12 - (x - 8) = 20 - x$, 即 $20 - x = x$, 求得 $x = 10$.

二、简答题

9.【解答】那么 s 的整数部分是 46.

$$\frac{10}{11} + \frac{11}{12} + \frac{12}{13} + \cdots + \frac{18}{19} + \frac{19}{20} = 10 - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20} \right),$$

因为

$$\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20} \right) \times 5 < \frac{31}{11 \times 20} \times 5 \times 5 = 3 \frac{23}{44} < 4,$$

$$\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20}\right) \times 5 > \frac{31}{15 \times 16} \times 5 \times 5 = 3\frac{11}{48} > 3,$$

所以

$$46 = 50 - 4 < 10 \times 5 - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20}\right) \times 5 < 50 - 3 = 47,$$

故 s 的整数部分是 46.

10. 【解答】所有写出的数(包括开始时的 $1, 2, 3, \dots, 2017$) 的和是 13088068.

找规律得: 如果纸上有 4^k 个数, 那么划完这 4^k 个数后, 纸上还剩 4^{k-1} 个数(记为 1 轮), 其和与原来的 4^k 个数的和 S 相等, 那么, 经过 k 轮, 纸上就只剩 1 个数, 而且每一轮后剩下的数的和都与原来的 4^k 个数的和相等, 所写数的总和为 $(k+1)S$.

由于 $2017 = 4^5 + 993$, 划去 993 个数需要 331 步, 也就是说, 当划到 1324 时, 纸上剩下 4^5 个数, 其和为 $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 = 2035153$, 划去的数的和为 $1 + 2 + 3 + \cdots + 1324 = 877150$. 当最后剩下 1 个数时, 写出数的总和为 $877150 + 6 \times 2035153 = 13088068$.

11. 【解答】四边形 $FGEH$ 的面积是 10.

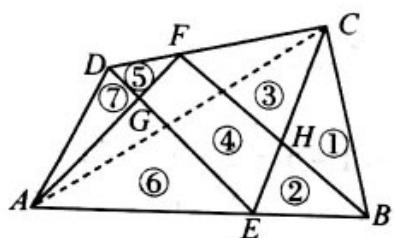


图 F3-7

如图 F3-7, 连接 AC , 由 $AE = 2EB$, 知 $\triangle BCE$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{3}$, 同理, 知 $\triangle ADF$ 的面积是 $\triangle ADC$ 面积的 $\frac{1}{3}$, 即 $\triangle BCE$ 与 $\triangle ADF$ 的面积和是四边形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{3}$; 同样地, $\triangle BCF$ 与 $\triangle ADE$ 的面积和是四边形 $ABCD$ 面积的 $\frac{2}{3}$; 故四边形 $ABCD$ 的面积等于 $\triangle BCE$, $\triangle ADF$, $\triangle BCF$, $\triangle ADE$ 的面积之和. 观察四边形 $ABCD$, 被分为七个部分, 其面积等于各部分面积之和, 即 $① + ② + ③ + ④ + ⑤ + ⑥ + ⑦$; 而 $\triangle BCE$, $\triangle ADF$, $\triangle BCF$, $\triangle ADE$ 的面积之和等于 $2 \times ① + ② + ③ + ⑤ + ⑥ + 2 \times ⑦$, 所以有 $①$ 与 $⑦$ 的面积和等于 $④$ 的面积, 即四边形 $FGEH$ 的面积等于 $\triangle ADG$ 与 $\triangle BCH$ 的面积和, 所以, 四边形 $FGEH$ 的面积是 10.

12. 【解答】没有这样的偶数.

设

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2, a < b < c < d < e. \quad (*)$$

由 n 是偶数, 可知 $a = 1, b = 2, c, d, e$ 中有一个或三个奇数.

如果 c, d, e 都是奇数, c^2, d^2, e^2 被 4 除余 1, 故 (*) 式是 4 的倍数, 即 4 是 n 的约数, 所以 c, d, e 中应该有 4, 矛盾.

如果 c, d, e 中只有 1 个奇数, 这个奇数就是 n 的最小奇质因子 p , 另两个约数是偶数, 所以右式被 4 除余 2, 故 n 不是 4 的倍数, 所以这三个数中没有 4. 于是这五个约数只能是 $1, 2, p, 2p, 2p^2$, 则 $n = 1 + 4 + p^2 + 4p^2 + 4p^4 = 5(1 + p^2) + 4p^4$, 由 $2p^2$ 是 n 的约数, 可以推出 p^2 整除 5, 不可能.

所以没有这样的正偶数, 恰好等于其最小的 5 个约数的平方和.

三、详答题

13. 【解答】可以在平面上得到 59 个大小不同的锐角.

得到的锐角的度数 α (不一定是整数) 可以表示为 $16.5m - 360n$ 或 $360n - 16.5m$, 其中 m, n 是整数 ($0 < \alpha < 90$), 若 $\alpha = 16.5m - 360n = 1.5 \times (11m - 240n)$, 因为方程 $11m - 240n = 1$ 有解 $m = 131, n = 6$; 所以, $11m - 240n$ 可以取到任意整数. 所以, $1.5 \times (11m - 240n)$ 可以取得 1.5 的任意整数倍, 又 $0 < \alpha < 90$, 所以 α 最小为 $1.5 \times 1 = 1.5$, 最大为 $1.5 \times 59 = 88.5$, 可以得到 59 个不相同的锐角. 若 $\alpha = 360n - 16.5m$, 同理可知, 可以得到的仍为上述 59 个不相同的锐角. 综上所述, 可以在平面上得到 59 个大小不同的锐角.

14. 【解答】 n 的最小值是 9.

用符号 $m \equiv n \pmod{20}$ 表示整数 m 和 n 除以 20 的余数相同.

一方面, 存在 8 个数: 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 40 它们中任何 4 个数都不满足条件. 所以, n 的最小值大于或等于 9.

另一方面, 任意 9 个不同的整数, 从中任取 7 个, 它们的两两之和至多有 21 种, 除以 20 的余数必有两个是相同的.

(1) 如果这 7 个数中, 有 4 个不同的数 a, b, c, d , 使得 $a + b \equiv c + d \pmod{20}$, 则这 4 个数满足问题的要求.

(2) 如果这 7 个数中, 有 3 个不同的数, 使得 $a + x$ 与 $c + x$ 除以 20 的余数都相同, 此时 $a - c$ 是 20 的倍数. 分析 9 个数中余下的 7 个数, 要不可以找到 4 个数满足问题的要求, 要不可以找到 2 个数 b 和 d , 使得 $b - d$ 是 20 的倍数, 于是也找到 4 个数 a, b, c, d , 满足问题的要求.

如果 9 个数中有相同的数, 同上易找到 4 个数满足.

综上, n 的最小值是 9.

决赛模拟测试题(3)

一、填空题

1. 【答案】 $4\frac{5606}{224775}$.

【理由】原式 $= 2 \frac{4}{900} \times 2 \frac{8}{999} = \frac{1804}{900} \times \frac{2006}{999} = \frac{3618824}{899100} = \frac{904706}{224775} = 4 \frac{5606}{224775}$

2. 【答案】 $\frac{1}{8}$.

【理由】 $3p, 5q$ 中有 1 个偶数, 若 $3p$ 是偶数, 则 $p = 2, q = 5$,

$$\frac{p}{3q+1} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

若 $5q$ 是偶数, 则 $q = 2, p = 7, \frac{p}{3q+1} = 1$.

3.【答案】2019.

【理由】首先证明,对于整数 a, b ,恒有: $S(a) + S(b) \equiv S(a + b) \pmod{9}$ (表示 \equiv 的左右端被9除余数相同).

$$\begin{aligned} a &\equiv S(a) \pmod{9}, b \equiv S(b) \pmod{9}, a + b \equiv S(a + b) \pmod{9}, \\ \therefore a - S(a) &= 9k, b - S(b) = 9l, a + b - S(a + b) = 9(k + l), \\ a + b &= S(a) + S(b) + 9(k + l). \\ \therefore a + b - S(a + b) &= 9m, \\ a + b &= S(a + b) + 9m = S(a) + S(b) + 9(k + l), \\ S(a) + S(b) - S(a + b) &= 9(k + l - m). \\ \therefore a + b &\equiv S(a) + S(b) \equiv S(a + b). \end{aligned}$$

下面解答本题:

$$\begin{aligned} 9 &= S(4a) - S(a) \equiv S(4a - a) \equiv S(3a) \equiv 3S(a) \pmod{9}. \\ \therefore a &\equiv S(a) \equiv 3 \pmod{9}. \end{aligned} \quad (*)$$

此即 $a = 9k + 3 > 2017, k > 223$.

k	a	$S(a) + 9$	$S(4a)$
224	2019	21	21

4.【答案】811.

【理由】将 $1, 2, 3, \dots, 2015, 2016$ 按除以10的余数分成10个小类:

第1类: $\{1, 11, 21, \dots, 2011\}$,共202个;

第2类: $\{2, 12, 22, \dots, 2012\}$,共202个;

...

第6类: $\{6, 16, 26, \dots, 2016\}$,共202个;

第7类: $\{7, 17, 27, \dots, 2007\}$,共201个;

...

第9类: $\{9, 19, 29, \dots, 2009\}$,共201个;

第10类: $\{10, 20, 30, \dots, 2010\}$,共201个.

从第5类和第10类各取1个数,将第1至第4类全部取出,共取出810个,其中任何2个数的和都不可能是10的倍数.再将以上10个小类整理合并成6个大类:

{第1,9类},{第2,8类},{第3,7类},{第4,6类},{第5类},{第10类},如果取出的数多于810个,那么,要么一定在前4大类中的一个所属2个小类都有数被取出,它们的和是10的倍数,要么在最后两类中的一类取出2个以上的数,它们的和是10的倍数.

5.【答案】2017.

【理由】因为 $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$ 被8除余数是1,

$$(2k + 1)^3 = (2k + 1)^2 \times (2k + 1) \equiv (2k + 1) \pmod{8},$$

所以,505个整数 $1, 3^3, 5^3, \dots, (2k + 1)^3, \dots, 999^3, 1001^3, 1003^3, 1005^3, 1007^3, 1009^3$,被8除的余数分别是 $1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, \dots, 1, 3, 5, 7, 1$.因此,整数串 $1, 3^3, 5^3, \dots,$

$(2k+1)^3, \dots, 999^3, 1001^3, 1003^3, 1005^3, 1007^3, 1009^3$ 被 8 除的余数的总和是:
 $(1 + 3 + 5 + 7) \times 126 + 1 = 2017.$

6. [答案] 1260.

【解答】解法一:三角形内有 3 个点,以其中 1 个点和该三角形 3 个顶点为顶点,可以连出 3 个相互之间没有重叠的三角形(见图 F3-8a);如果第 2 个点落在其中某个三角形,则同样,这个三角形 3 个顶点和第 2 个点为顶点可以连接出 3 个没有重叠的三角形(见图 F3-8b),增加了 2 个三角形;如果第 2 个点落在某个三角形的一条边,也增加了 2 个三角形(见图 F3-8c);增加到 3 个点,则同样增加 2 个三角形,共连接出 7 个相互之间没有重叠的三角形,每个的内角和是 180° ,共 1260° .

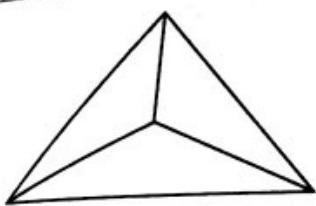


图 F3-8a

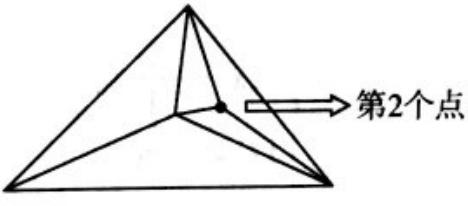


图 F3-8b

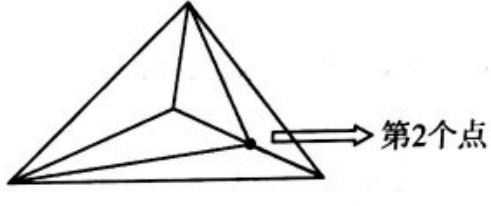


图 F3-8c

解法二:三角形内绕 1 个点的角的和是 360° ,3 个点,则绕这 3 个点所有角的和是 1080° ,另外加上原三角形的 3 个内角和,共 1260° .

7. [答案] 1010.

【理由】小于 2018 的奇数有 1009 个,从中找不到 3 个数,一个是另两个的和;也找不到两个数,一个是另一个的 2 倍.因此 $n > 1009$. 现在考虑 1010 个数, $a_1 < a_2 < \dots < a_{1010} < 2018$,做数列 $b_1 = a_{1010} - a_1, b_2 = a_{1010} - a_2, \dots, b_{1009} = a_{1010} - a_{1009}$,数列 $\{b_k\}$ 和数列 $\{a_k\}$ 中,共有 2019 个小于 2018 的非 0 自然数,必定各有一项 $a_{1010} - a_i$ 和 a_j 满足 $a_{1010} - a_i = a_j$. 若 $a_i \neq a_j$, 则 a_{1010}, a_i, a_j 是满足题目所要求的 3 个数;若 $a_i = a_j$, 则 a_{1010}, a_i 是满足题目所要求的 2 个数.

8. [答案] 28.

【理由】赞成用 0 表示,反对用 1 表示,弃权用 2 表示.则每个委员的三次投票可以写成一个三进制的三位数,最大的三进制的三位数 = 26.从 0 到 26,共 27 个数.若委员人数超过 27,则一定有 2 个委员的三次投票写成三进制的三位数相等,他们三次表态完全相同.

因此,委员会最少有 28 人.

二、简答题

9. [解答] 是奇数.

寻找在操作过程中不变的性质.考虑黑板上的奇数的个数.
如果擦去的是 2 个偶数,那么写下的是一个偶数;如果擦去的是 2 个偶数,写下的是一次操作,黑板上的奇数的个数的奇偶性是不变的.

开始有 1009 个奇数,因此,最后留下的 1 个数一定是奇数,不能是偶数.

10.【解答】小明能赢.

小明要赢,我们用倒推法来计算,那么他从最后一次开始往前推每次他取完后应余下的火柴数依次是: 2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, (3071), 所以, 小明取胜的策略是: 不能让小丽取以上数字:

$$2017 \rightarrow 1535 \rightarrow 767 \rightarrow 383 \rightarrow 191 \rightarrow 95 \rightarrow 47 \rightarrow 28$$

第一次取走482根, …, 当桌面上留下5根时, 若小丽取1根, 则小明取2根; 若小丽取2根, 则小明取1根; 最后轮到小丽时, 只有2根, 所以她输了.

11.【解答】有6位小朋友.

设有 x 位小朋友, 则每一盒中有 $8x - 5$ 张卡片. $\frac{56x + 8}{8x - 5}$ 是整数, $\frac{56x + 8}{8x - 5} - 7$ 是整数,

$$\frac{56x + 8 - 56x + 35}{8x - 5} = \frac{43}{8x - 5}, 8x - 5 = \begin{cases} 1; x = \frac{3}{4} \text{ 舍去,} \\ 43; x = 6. \end{cases}$$

12.【解答】这个四位数是1984.

设 $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$, 则约数个数是: $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \cdots (s_k + 1) = 14 = 2 \times 7 = 1 \times 14$, 由于, $s_i + 1 > 1, i = 1, 2, \dots, k, \therefore k \leq 2$,

$$1) k = 1, n = p^{13} \geq 11^{13} > 10000, \text{不是四位数.}$$

$$2) k = 2, n = p_1 p_2^6 = \begin{cases} 11 \times 3^6 > 2000, \\ 11 \times 2^6 < 1000, \\ 31 \times 2^6 = 1984 < 2000. \end{cases}$$

三、详答题

13.【解答】甲、乙可能相遇的位置距离A点的路程是320米, 240米, 160米, 80米和0米.

设乙第 m 次回到A点的时间为 t , 则 $t = 100m$, 此时甲跑了 $600m$ 米. 甲的一个周期为 $600 + 400 = 1000$ (米). 因此, t 时刻甲跑了 $\frac{600m}{1000}$ 个周期.

$$\frac{600m}{1000} = \frac{3m}{5} = \left[\frac{3m}{5} \right] + \left\{ \frac{3m}{5} \right\}.$$

其中整数部分表示甲回到A点, 小数部分表示甲又从A点跑了一部分路程, 但是不到一个周期, 这一部分路程的长度是 $\left\{ \frac{3m}{5} \right\} \times 1000$ 米. 由此, 我们可以算出甲的位置:

$3m =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$
小数部分表示的路程(米)	0	200	400	600	800
甲、乙相距的路程(米)	0	800	600	400	200
甲、乙相遇还需的时间(秒)	0	80	60	40	20
甲、乙相遇的位置(米)	0	80	160	240	320

【说明和评注】 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数, $\{a\} = a - [a]$.

14.【解答】三角形 ADE 的面积是 14cm^2 .

审视此题,注意到 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC = 120^\circ$, 120° 是一个特殊角,联想到 3 个 120° 就是一个周角,又 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,所以把 3 个这样的等腰三角形“头”对“头”、“肩”对“肩”地放在一起,正好可构成一个等边三角形.为了完成这个过程,我们把 $\triangle ABC$ 绕顶点 A 逆时针连续旋转两次,每次旋转 120° ,相应得到的三角形是:(见图 F3 - 9a):

$$\triangle ABC \Leftrightarrow \triangle ACF \Leftrightarrow \triangle AFB,$$

而 $\triangle ADE$ 也随 $\triangle ABC$ 相应地旋转到对应的位置:(见图 F3 - 9a):

$$\triangle ADE \Leftrightarrow \triangle AD_1E_1 \Leftrightarrow \triangle AD_2E_2,$$

注意到 AD 这条线段旋转到 AD_1 的位置共旋转了 120° ,而 $\angle DAE = 60^\circ$,所以 $\angle EAD_1 = 60^\circ$.同理可知: $\angle E_1AD_2 = \angle E_2AD = 60^\circ$.

又 $AD = AE = AD_1 = AE_1 = AD_2 = AE_2$,这说明六边形 $DED_1E_1D_2E_2$ 是正六边形.为使构图完整,连接 ED_1, E_1D_2, E_2D (如图 F3 - 9b).

通过上面的分析可得:正六边形 $DED_1E_1D_2E_2$ 的面积是 $\triangle ADE$ 面积的 6 倍,且 $\triangle DD_1D_2$ 也是正三角形,其面积是正六边形 $DED_1E_1D_2E_2$ 面积的 $\frac{1}{2}$,所以 $\triangle ADE$ 的面积是 $\triangle DD_1D_2$ 面积的 $\frac{1}{3}$ 倍(如图 F3 - 9c).

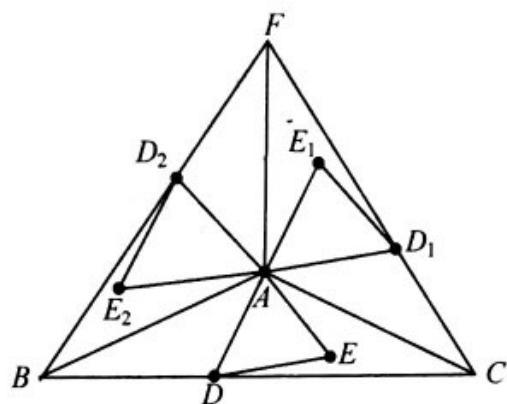


图 F3 - 9a

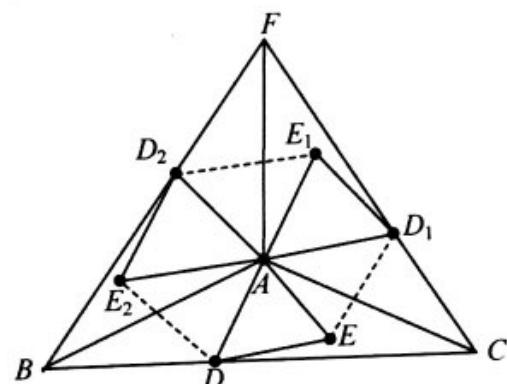


图 F3 - 9b

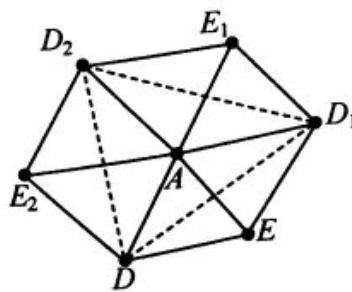


图 F3 - 9c

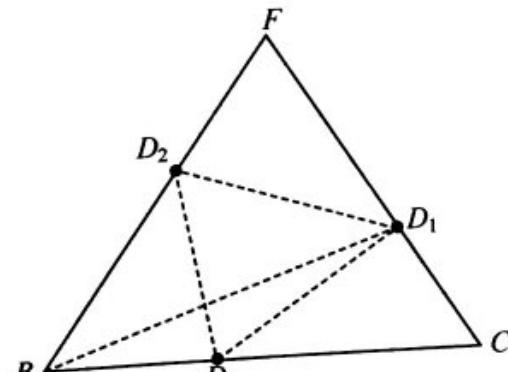


图 F3 - 9d

经过上面的分析,我们把原问题化归成了下面一个问题:
在等边 $\triangle FBC$ 中,点 D, D_1, D_2 是三边上的分点, $BD:DC = CD_1:D_1F = FD_2:D_2B = 2:3$,求 $\triangle DD_1D_2$ 的面积(如图 F3 - 9d).

利用“高一定,面积比等于底之比”求其面积.

如图 F3 - 9d, 连接 BD_1 , $S_{\triangle DD_1C} = \frac{3}{5} \times S_{\triangle BCD_1} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times S_{\triangle FBC} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times (50 \times 3) = 36(\text{cm}^2)$

重复上面的过程可求得: $S_{\triangle D_1FD_2} = S_{\triangle D_2BD} = 36(\text{cm}^2)$

因此: $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle DD_1D_2} = \frac{1}{3} \times (150 - 36 \times 3) = 14(\text{cm}^2)$.