**二项式定理考点-高中数学选修2-3第一章**

基础梳理

1．二项式定理

(*a*＋*b*)*n*＝C*an*＋C*an*－1*b*＋…＋C*an*－*rbr*＋…＋C*bn*(*n*∈**N**\*)这个公式所表示的定理叫二项式定理，右边的多项式叫(*a*＋*b*)*n*的二项展开式．

其中的系数C(*r*＝0,1，…，*n*)叫二项式系数．

式中的C*an*－*rbr*叫二项展开式的通项，用*Tr*＋1表示，即通项*Tr*＋1＝C*an*－*rbr*.

2．二项展开式形式上的特点

(1)项数为*n*＋1.

(2)各项的次数都等于二项式的幂指数*n*，即*a*与*b*的指数的和为*n*.

(3)字母*a*按降幂排列，从第一项开始，次数由*n*逐项减1直到零；字母*b*按升幂排列，从第一项起，次数由零逐项增1直到*n*.

(4)二项式的系数从C，C，一直到C，C.

3．二项式系数的性质

(1)对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等．即C＝C.

(2)增减性与最大值：

二项式系数C，当*k*＜时，二项式系数逐渐增大．由对称性知它的后半部分是逐渐减小的；

当*n*是偶数时，中间一项C*n*取得最大值；

当*n*是奇数时，中间两项C*n*，C*n*取得最大值．

(3)各二项式系数和：C＋C＋C＋…＋C＋…＋C＝2*n*；

C＋C＋C＋…＝C＋C＋C＋…＝2*n*－1.

一个防范

运用二项式定理一定要牢记通项*Tr*＋1＝C*an*－*rbr*，注意(*a*＋*b*)*n*与(*b*＋*a*)*n*虽然相同，但具体到它们展开式的某一项时是不同的，一定要注意顺序问题，另外二项展开式的二项式系数与该项的(字母)系数是两个不同的概念，前者只指C，而后者是字母外的部分．前者只与*n*和*r*有关，恒为正，后者还与*a*，*b*有关，可正可负．

一个定理

二项式定理可利用数学归纳法证明，也可根据次数，项数和系数利用排列组合的知识推导二项式定理．因此二项式定理是排列组合知识的发展和延续．

两种应用

(1)通项的应用：利用二项展开式的通项可求指定的项或指定项的系数等．

(2)展开式的应用：利用展开式①可证明与二项式系数有关的等式；②可证明不等式；③可证明整除问题；④可做近似计算等．

三条性质

(1)对称性；

(2)增减性；

(3)各项二项式系数的和；

以上性质可通过观察杨辉三角进行归纳总结．

双基自测

1．(2011·福建)(1＋2*x*)5的展开式中，*x*2的系数等于(　　)．

A．80 B．40 C．20 D．10

解析　*Tr*＋1＝C(2*x*)*r*＝2*r*C*xr*，

当*r*＝2时，*T*3＝40*x*2.

答案　B

2．若(1＋)5＝*a*＋*b*(*a*，*b*为有理数)，则*a*＋*b*＝(　　)．

A．45 B．55 C．70 D．80

解析　(1＋)5＝1＋5＋10()2＋10()3＋5()4＋()5＝41＋29

由已知条件*a*＝41，*b*＝29，则*a*＋*b*＝70.

答案　C

3．(人教B版教材习题改编)若(*x*－1)4＝*a*0＋*a*1*x*＋*a*2*x*2＋*a*3*x*3＋*a*4*x*4，则*a*0＋*a*2＋*a*4的值为(　　)．

A．9 B．8 C．7 D．6

解析　令*x*＝1，则*a*0＋*a*1＋*a*2＋*a*3＋*a*4＝0

令*x*＝－1，则*a*0－*a*1＋*a*2－*a*3＋*a*4＝16

∴*a*0＋*a*2＋*a*4＝8.

答案　B

4．(2011·重庆)(1＋3*x*)*n*(其中*n*∈**N**且*n*≥6)的展开式中*x*5与*x*6的系数相等，则*n*＝(　　)．

A．6 B．7 C．8 D．9

解析　*Tr*＋1＝C(3*x*)*r*＝3*r*C*xr*

由已知条件35C＝36C

即C＝3C

＝3

整理得*n*＝7

答案　B

5．(2011·安徽)设(*x*－1)21＝*a*0＋*a*1*x*＋*a*2*x*2＋…＋*a*21*x*21，则*a*10＋*a*11＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析　*Tr*＋1＝C*x*21－*r*(－1)*r*＝(－1)*r*C*x*21－*r*

由题意知*a*10，*a*11分别是含*x*10和*x*11项的系数，所以*a*10＝－C，*a*11＝C，

∴*a*10＋*a*11＝C－C＝0.

答案　0

考向一　二项展开式中的特定项或特定项的系数

【例1】►已知在*n*的展开式中，第6项为常数项．

(1)求*n*；

(2)求含*x*2的项的系数；

(3)求展开式中所有的有理项．

[审题视点] 准确记住二项展开式的通项公式是解此类题的关键．

解　通项公式为*Tr*＋1＝C*x*(－3)*rx*－＝(－3)*r*C*x*.

(1)∵第6项为常数项，

∴*r*＝5时，有＝0，解得*n*＝10.

(2)令＝2，得*r*＝(*n*－6)＝2，

∴*x*2的项的系数为C(－3)2＝405.

(3)由题意知令＝*k*(*k*∈**Z**)，则10－2*r*＝3*k*，即*r*＝5－*k*，∵*r*∈**Z**，∴*k*应为偶数，∴*k*＝2,0，－2，即*r*＝2,5,8.∴第3项，第6项，第9项为有理项，它们分别为405*x*2，－61 236,295 245*x*－2.

 求二项展开式中的指定项，一般是利用通项公式进行，化简通项公式后，令字母的指数符合要求(求常数项时，指数为零；求有理项时，指数为整数等)，解出项数*k*＋1，代回通项公式即可．

【训练1】 (2011·山东)若6展开式的常数项为60，则常数*a*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析　二项式6展开式的通项公式是*Tr*＋1＝C*x*6－*r*(－)*rx*－2*r*＝C*x*6－3*r*(－)*r*，当*r*＝2时，*Tr*＋1为常数项，即常数项是C*a*，根据已知C*a*＝60，解得*a*＝4.

答案　4

考向二　二项式定理中的赋值

【例2】►二项式(2*x*－3*y*)9的展开式中，求：

(1)二项式系数之和；

(2)各项系数之和；

(3)所有奇数项系数之和．

[审题视点] 此类问题要仔细观察，对二项式中的变量正确赋值．

解　设(2*x*－3*y*)9＝*a*0*x*9＋*a*1*x*8*y*＋*a*2*x*7*y*2＋…＋*a*9*y*9.

(1)二项式系数之和为C＋C＋C＋…＋C＝29.

(2)各项系数之和为*a*0＋*a*1＋*a*2＋…＋*a*9＝(2－3)9＝－1

(3)由(2)知*a*0＋*a*1＋*a*2＋…＋*a*9＝－1，

令*x*＝1，*y*＝－1，得*a*0－*a*1＋*a*2－…－*a*9＝59，

将两式相加，得*a*0＋*a*2＋*a*4＋*a*6＋*a*8＝，即为所有奇数项系数之和．

 二项式定理给出的是一个恒等式，对*a*，*b*赋予一些特定的值，是解决二项式问题的一种重要思想方法．赋值法是从函数的角度来应用二项式定理，即函数*f*(*a*，*b*)＝(*a*＋*b*)*n*＝C*an*＋C*an*－1*b*＋…＋C*an*－*rbr*＋…＋C*bn*.对*a*，*b*赋予一定的值，就能得到一个等式．

【训练2】 已知(1－2*x*)7＝*a*0＋*a*1*x*＋*a*2*x*2＋…＋*a*7*x*7.

求：(1)*a*1＋*a*2＋…＋*a*7；(2)*a*1＋*a*3＋*a*5＋*a*7；(3)*a*0＋*a*2＋*a*4＋*a*6；(4)|*a*0|＋|*a*1|＋|*a*2|＋…＋|*a*7|.

解　令*x*＝1，则*a*0＋*a*1＋*a*2＋*a*3＋*a*4＋*a*5＋*a*6＋*a*7＝－1.①

令*x*＝－1，则*a*0－*a*1＋*a*2－*a*3＋*a*4－*a*5＋*a*6－*a*7＝37.②

(1)∵*a*0＝C＝1，∴*a*1＋*a*2＋*a*3＋…＋*a*7＝－2.

(2)(①－②)÷2，得*a*1＋*a*3＋*a*5＋*a*7＝＝－1 094.

(3)(①＋②)÷2，得*a*0＋*a*2＋*a*4＋*a*6＝＝1 093.

(4)∵(1－2*x*)7展开式中，*a*0，*a*2，*a*4，*a*6大于零，而*a*1，*a*3，*a*5，*a*7小于零，

∴|*a*0|＋|*a*1|＋|*a*2|＋…＋|*a*7|＝(*a*0＋*a*2＋*a*4＋*a*6)－(*a*1＋*a*3＋*a*5＋*a*7)＝1 093－(－1 094)＝2 187.

考向三　二项式的和与积

【例3】►(1＋2*x*)3(1－*x*)4展开式中*x*项的系数为\_\_\_\_\_\_\_\_．

[审题视点] 求多个二项式积的某项系数，要会转化成二项式定理的形式．

解析　(1＋2*x*)3(1－*x*)4展开式中的*x*项的系数为两个因式相乘而得到，即第一个因式的常数项和一次项分别乘以第二个因式的一次项与常数项，它为C(2*x*)0·C(－*x*)1＋C(2*x*)1·C14(－*x*)0，其系数为C·C(－1)＋C·2＝－4＋6＝2.

答案　2

 对于求多个二项式的和或积的展开式中某项的

系数问题，要注意排列、组合知识的运用，还要注意有关指数的运算性质．二项式定理研究两项和的展开式，对于三项式问题，一般是通过合并其中的两项或进行因式分解，转化成二项式定理的形式去求解．

【训练3】 (2011·广东)*x*7的展开式中，*x*4的系数是\_\_\_\_\_\_\_\_(用数字作答)．

解析　原问题等价于求7的展开式中*x*3的系数，7的通项*Tr*＋1＝C*x*7－*rr*＝(－2)*r*C*x*7－2*r*，令7－2*r*＝3得*r*＝2，∴*x*3的系数为(－2)2C＝84，即*x*7的展开式中*x*4的系数为84.

答案　84

　　难点突破23——排列组合在二项展开式中的应用

(*a*＋*b*)*n*展开式可以由次数、项数和系数来确定．

(1)次数的确定

从*n*个相同的*a*＋*b*中各取一个(*a*或*b*)乘起来，可以构成展开式中的一项，展开式中项的形式是*mapbq*，

其中*p*∈**N**，*q*∈**N**，*p*＋*q*＝*n*.

(2)项数的确定

满足条件*p*＋*q*＝*n*，*p*∈**N**，*q*∈**N**的(*p*，*q*)共*n*＋1组．

即将(*a*＋*b*)*n*展开共2*n*项，合并同类项后共*n*＋1项．

(3)系数的确定

展开式中含*apbq*(*p*＋*q*＝*n*)项的系数为C(即*p*个*a*，*q*个*b*的排列数)因此(*a*＋*b*)*n*展开式中的通项是

*Tr*＋1＝C*an*－*rbr*(*r*＝0,1,2，…，*n*)

(*a*＋*b*)*n*＝C*an*＋C*an*－1*b*＋C*an*－2*b*2＋…＋C*bn*这种方法比数学归纳法推导二项式定理更具一般性和创造性，不仅可二项展开，也可三项展开，四项展开等．

【示例】► 若多项式*x*3＋*x*10＝*a*0＋*a*1(*x*＋1)＋…＋*a*9(*x*＋1)9＋*a*10(*x*＋1)10，则*a*9＝(　　)．

A．9 B．10 C．－9 D．－10



