**数学归纳法题库及答案-高中数学选修2-2第二章**

巩固

1．一个关于自然数*n*的命题，如果验证当*n*＝1时命题成立，并在假设当*n*＝*k*(*k*≥1且*k*∈**N**\*)时命题成立的基础上，证明了当*n*＝*k*＋2时命题成立，那么综合上述，对于(　　)

A．一切正整数命题成立

B．一切正奇数命题成立

C．一切正偶数命题成立

D．以上都不对

解析：选B.本题证的是对*n*＝1,3,5,7，…命题成立，即命题对一切正奇数成立．

2．在数列{*an*}中，*an*＝1－＋－＋…＋－，则*ak*＋1＝(　　)

A．*ak*＋

B．*ak*＋－

C．*ak*＋

D．*ak*＋－

解析：选D.*a*1＝1－，*a*2＝1－＋－，…，*an*＝1－＋－＋…＋－，*ak*＝1－＋－＋…＋－，所以，*ak*＋1＝*ak*＋－.

3．设平面内有*k*条直线，其中任何两条不平行，任何三条不共点，设*k*条直线的交点个数为*f*(*k*)，则*f*(*k*＋1)与*f*(*k*)的关系是(　　)

A．*f*(*k*＋1)＝*f*(*k*)＋*k*＋1

B．*f*(*k*＋1)＝*f*(*k*)＋*k*－1

C．*f*(*k*＋1)＝*f*(*k*)＋*k*

D．*f*(*k*＋1)＝*f*(*k*)＋*k*＋2

解析：选C.当*n*＝*k*＋1时，任取其中1条直线，记为*l*，则除*l*外的其他*k*条直线的交点的个数为*f*(*k*)，因为已知任何两条直线不平行，所以直线*l*必与平面内其他*k*条直线都相交(有*k*个交点)；又因为已知任何三条直线不过同一点，所以上面的*k*个交点两两不相同，且与平面内其他的*f*(*k*)个交点也两两不相同，从而平面内交点的个数是*f*(*k*)＋*k*＝*f*(*k*＋1)．

4．用数学归纳法证明当*n*∈**N**\*时1＋2＋22＋23＋…＋25*n*－1是31的倍数时，当*n*＝1时原式为\_\_\_\_\_\_\_\_，从*k*→*k*＋1时需增添的项是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：把*n*＝*k*，*n*＝*k*＋1相比较即可得出．

答案：1＋2＋22＋23＋24　25*k*＋25*k*＋1＋25*k*＋2＋25*k*＋3＋25*k*＋4

5．用数学归纳法证明1＋2＋3＋…＋*n*2＝时，当*n*＝*k*＋1时左端在*n*＝*k*时的左端加上\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：*n*＝*k*时左端为1＋2＋3＋…＋*k*2，*n*＝*k*＋1时左端为1＋2＋3＋…＋*k*2＋(*k*2＋1)＋(*k*2＋2)＋…＋(*k*＋1)2.

答案：(*k*2＋1)＋(*k*2＋2)＋…＋(*k*＋1)2

6．数列{*an*}满足*Sn*＝2*n*－*an*(*n*∈**N**\*)．

(1)计算*a*1，*a*2，*a*3，*a*4，并由此猜想通项公式*an*；

(2)用数学归纳法证明(1)中的猜想．

解：(1)*a*1＝1，*a*2＝，*a*3＝，*a*4＝，

由此猜想*an*＝(*n*∈**N**\*)．

(2)证明：当*n*＝1时，*a*1＝1，结论成立．

假设*n*＝*k*(*k*≥1，且*k*∈**N**\*)时，结论成立，

即*ak*＝，

那么*n*＝*k*＋1(*k*≥1，且*k*∈**N**\*)时，

*ak*＋1＝*Sk*＋1－*Sk*＝2(*k*＋1)－*ak*＋1－2*k*＋*ak*

＝2＋*ak*－*ak*＋1.

∴2*ak*＋1＝2＋*ak*，

∴*ak*＋1＝＝＝，

这表明*n*＝*k*＋1时，结论成立．

∴*an*＝(*n*∈**N**\*)．

练习

1．用数学归纳法证明“当*n*为正奇数时，*xn*＋*yn*能被*x*＋*y*整除”，第二步归纳假设应写成(　　)

A．假设*n*＝2*k*＋1(*k*∈**N**\*)正确，再推*n*＝2*k*＋3正确

B．假设*n*＝2*k*－1(*k*∈**N**\*)正确，再推*n*＝2*k*＋1正确

C．假设*n*＝*k*(*k*∈**N**\*)正确，再推*n*＝*k*＋1正确

D．假设*n*＝*k*(*k*≥1)正确，再推*n*＝*k*＋2正确

解析：选B.首先要注意*n*为奇数，其次还要使*n*＝2*k*－1能取到1，故选B.

2．用数学归纳法证明等式1＋3＋5＋…＋(2*n*－1)＝*n*2(*n*∈**N**\*)的过程中，第二步假设*n*＝*k*时等式成立，则当*n*＝*k*＋1时应得到(　　)

A．1＋3＋5＋…＋(2*k*＋1)＝*k*2

B．1＋3＋5＋…＋(2*k*＋1)＝(*k*＋1)2

C．1＋3＋5＋…＋(2*k*＋1)＝(*k*＋2)2

D．1＋3＋5＋…＋(2*k*＋1)＝(*k*＋3)2

解析：选B.∵*n*＝*k*＋1时，

等式左边＝1＋3＋5＋…＋(2*k*－1)＋(2*k*＋1)

＝*k*2＋(2*k*＋1)＝(*k*＋1)2.故选B.

3．用数学归纳法证明：“1＋*a*＋*a*2＋…＋*an*＋1＝(*a*≠1)”在验证*n*＝1时，左端计算所得的项为(　　)

A．1 B．1＋*a*

C．1＋*a*＋*a*2 D．1＋*a*＋*a*2＋*a*3

解析：选C.当*n*＝1时，左端＝1＋*a*＋*a*2.

4．下列代数式(其中*k*∈**N**\*)能被9整除的是(　　)

A．6＋6·7*k*　　　　　　　　B．2＋7*k*－1

C．2(2＋7*k*＋1) D．3(2＋7*k*)

解析：选D.(1)当*k*＝1时，显然只有3(2＋7*k*)能被9整除．

(2)假设当*k*＝*n*(*n*∈**N**\*)时，命题成立，即3(2＋7*n*)能被9整除，那么3(2＋7*n*＋1)＝21(2＋7*n*)－36.

这就是说，*k*＝*n*＋1时命题也成立．

5．已知1＋2×3＋3×32＋4×33＋…＋*n*×3*n*－1＝3*n*(*na*－*b*)＋*c*对一切*n*∈**N**\*都成立，则*a*、*b*、*c*的值为(　　)

A．*a*＝，*b*＝*c*＝ B．*a*＝*b*＝*c*＝

C．*a*＝0，*b*＝*c*＝ D．不存在这样的*a*、*b*、*c*

解析：选A.∵等式对一切*n*∈**N**\*均成立，

∴*n*＝1,2,3时等式成立，即

整理得，

解得*a*＝，*b*＝*c*＝.

6．在数列{*an*} 中，*a*1＝，且*Sn*＝*n*(2*n*－1)*an*，通过求*a*2，*a*3，*a*4，猜想*an*的表达式为(　　)

A. B.

C. D.

解析：选C.由*a*1＝，*Sn*＝*n*(2*n*－1)*an*，

得*S*2＝2(2×2－1)*a*2，即*a*1＋*a*2＝6*a*2，

∴*a*2＝＝，*S*3＝3(2×3－1)*a*3，

即＋＋*a*3＝15*a*3.

∴*a*3＝＝，*a*4＝.故选C .

7．利用数学归纳法证明“(*n*＋1)(*n*＋2)…(*n*＋*n*)＝2*n*×1×3×…×(2*n*－1)，*n*∈**N**\*”时，从“*n*＝*k*”变到“*n*＝*k*＋1”时，左边应增乘的因式是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：当*n*＝*k*(*k*∈**N**\*)时，左式为(*k*＋1)(*k*＋2)…(*k*＋*k*)；

当*n*＝*k*＋1时，左式为(*k*＋1＋1)·(*k*＋1＋2)·…·(*k*＋1＋*k*－1)·(*k*＋1＋*k*) ·(*k*＋1＋*k*＋1)，

则左边应增乘的式子是＝2(2*k*＋1)．

答案：2(2*k*＋1)

8．若*f*(*n*)＝12＋22＋32＋…＋(2*n*)2，则*f*(*k*＋1)与*f*(*k*)的递推关系式是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：∵*f*(*k*)＝12＋22＋…＋(2*k*)2，

∴*f*(*k*＋1)＝12＋22＋…＋(2*k*)2＋(2*k*＋1)2＋(2*k*＋2)2，

∴*f*(*k*＋1)＝*f*(*k*)＋(2*k*＋1)2＋(2*k*＋2)2.

答案：*f*(*k*＋1)＝*f*(*k*)＋(2*k*＋1)2＋(2*k*＋2)2

9．数列{*an*}中，已知*a*1＝1，当*n*≥2时，*an*－*an*－1＝2*n*－1，依次计算*a*2，*a*3，*a*4后，猜想*an*的表达式是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：计算出*a*1＝1，*a*2＝4，*a*3＝9，*a*4＝16.

可猜想*an*＝*n*2.

答案：*n*2

10．对于*n*∈**N**\*，用数学归纳法证明：

1·*n*＋2·(*n*－1)＋3·(*n*－2)＋…＋(*n*－1)·2＋*n*·1＝*n*(*n*＋1)(*n*＋2)．

证明：设*f*(*n*)＝1·*n*＋2·(*n*－1)＋3·(*n*－2)＋…＋(*n*－1)·2＋*n*·1.

(1)当*n*＝1时，左边＝1，右边＝1，等式成立；

(2)设当*n*＝*k*时等式成立，即1·*k*＋2·(*k*－1)＋3·(*k*－2)＋…＋(*k*－1)·2＋*k*·1＝*k*(*k*＋1)(*k*＋2)，

则当*n*＝*k*＋1时，

*f*(*k*＋1)＝1·(*k*＋1)＋2[(*k*＋1)－1]＋3[(*k*＋1)－2]＋…＋[(*k*＋1)－2]·3＋[(*k*＋1)－1]·2＋(*k*＋1)·1

＝*f*(*k*)＋1＋2＋3＋…＋*k*＋(*k*＋1)

＝*k*(*k*＋1)(*k*＋2)＋(*k*＋1)(*k*＋1＋1)

＝(*k*＋1)(*k*＋2)(*k*＋3)．

∴由(1)(2)可知当*n*∈**N**\*时等式都成立．

11.已知点*Pn*(*an*，*bn*)满足*an*＋1＝*an*·*bn*＋1，*bn*＋1＝(*n*∈**N**\*)且点*P*1的坐标为(1，－1)．

(1)求过点*P*1，*P*2的直线*l*的方程；

(2)试用数学归纳法证明：对于*n*∈**N**\*，点*Pn*都在(1)中的直线*l*上．

解：(1)由*P*1的坐标为(1，－1)知*a*1＝1，*b*1＝－1.

∴*b*2＝＝.

*a*2＝*a*1·*b*2＝.

∴点*P*2的坐标为(，)

∴直线*l*的方程为2*x*＋*y*＝1.

(2)证明：①当*n*＝1时，

2*a*1＋*b*1＝2×1＋(－1)＝1成立．

②假设*n*＝*k*(*k*∈**N**\*，*k*≥1)时，2*ak*＋*bk*＝1成立，

则当*n*＝*k*＋1时，

2*ak*＋1＋*bk*＋1＝2*ak*·*bk*＋1＋*bk*＋1＝(2*ak*＋1)

＝＝＝1，

∴当*n*＝*k*＋1时，命题也成立．

由①②知，对*n*∈**N**\*，都有2*an*＋*bn*＝1，

即点*Pn*在直线*l*上．

12．已知正项数列{*an*}和{*bn*}中，*a*1＝*a*(0＜*a*＜1)，*b*1＝1－*a*.当*n*≥2时，*an*＝*an*－1*bn*，*bn*＝.

(1)证明：对任意*n*∈**N**\*，有*an*＋*bn*＝1；

(2)求数列{*an*}的通项公式．

解：(1)证明：用数学归纳法证明．

①当*n*＝1时，*a*1＋*b*1＝*a*＋(1－*a*)＝1，命题成立；

②假设*n*＝*k*(*k*≥1且*k*∈**N**\*)时命题成立，即*ak*＋*bk*＝1，则当*n*＝*k*＋1时，*ak*＋1＋*bk*＋1＝*akbk*＋1＋*bk*＋1＝(*ak*＋1)·*bk*＋1＝(*ak*＋1)·＝＝＝1.

∴当*n*＝*k*＋1时，命题也成立．

由①、②可知，*an*＋*bn*＝1对*n*∈**N**\*恒成立．

(2)∵*an*＋1＝*anbn*＋1＝＝＝，

∴＝＝＋1，

即－＝1.

数列{}是公差为1的等差数列，其首项为＝，

＝＋(*n*－1)×1，从而*an*＝.