**数学归纳法解题方法与技巧-高中数学选修2-2第二章**

数学归纳法是高考考查的重点内容之一.类比与猜想是应用数学归纳法所体现的比较突出的思想，抽象与概括，从特殊到一般是应用的一种主要思想方法.

●难点磁场

(★★★★)是否存在*a*、*b*、*c*使得等式1·22+2·32+…+*n*(*n*+1)2=(*an*2+*bn*+*c*).

●案例探究

［例1］试证明：不论正数*a*、*b*、*c*是等差数列还是等比数列，当*n*＞1,*n*∈**N**\*且*a*、*b*、*c*互不相等时，均有：*an*+*cn*＞2*bn*.

命题意图：本题主要考查数学归纳法证明不等式，属★★★★级题目.

知识依托：等差数列、等比数列的性质及数学归纳法证明不等式的一般步骤.

错解分析：应分别证明不等式对等比数列或等差数列均成立，不应只证明一种情况.

技巧与方法：本题中使用到结论：(*ak*－*ck*)(*a*－*c*)＞0恒成立(*a*、*b*、*c*为正数)，从而*ak*+1+*ck*+1＞*ak*·*c*+*ck*·*a*.

证明：(1)设*a*、*b*、*c*为等比数列，*a*=,*c*=*bq*(*q*＞0且*q*≠1)

∴*an*+*cn*=+*bnqn*=*bn*(+*qn*)＞2*bn*

(2)设*a*、*b*、*c*为等差数列，则2*b*=*a*+*c*猜想＞()*n*(*n*≥2且*n*∈**N**\*)

下面用数学归纳法证明：

①当*n*=2时，由2(*a*2+*c*2)＞(*a*+*c*)2，∴

②设*n*=*k*时成立，即

则当*n*=*k*+1时， (*ak*+1+*ck*+1+*ak*+1+*ck*+1)

＞(*ak*+1+*ck*+1+*ak*·*c*+*ck*·*a*)=(*ak*+*ck*)(*a*+*c*)

＞()*k*·()=()*k*+1

［例2］在数列{*an*}中，*a*1=1，当*n*≥2时，*an*,*Sn*,*Sn*－成等比数列.

(1)求*a*2,*a*3,*a*4，并推出*an*的表达式；

(2)用数学归纳法证明所得的结论；

(3)求数列{*an*}所有项的和.

命题意图：本题考查了数列、数学归纳法、数列极限等基础知识.

知识依托：等比数列的性质及数学归纳法的一般步骤.采用的方法是归纳、猜想、证明.

错解分析：(2)中，*Sk*=－应舍去，这一点往往容易被忽视.

技巧与方法：求通项可证明{}是以{}为首项，为公差的等差数列，进而求得通项公式.

解：∵*an*,*Sn*,*Sn*－成等比数列，∴*Sn*2=*an*·(*Sn*－)(*n*≥2) (\*)

(1)由*a*1=1,*S*2=*a*1+*a*2=1+*a*2,代入(\*)式得:*a*2=－

由*a*1=1，*a*2=－,*S*3=+*a*3代入(\*)式得：*a*3=－

同理可得：*a*4=－,由此可推出：*an*=

(2)①当*n*=1,2,3,4时，由(\*)知猜想成立.

②假设*n*=*k*(*k*≥2)时，*ak*=－成立

故*Sk*2=－·(*Sk*－)

∴(2*k*－3)(2*k*－1)*Sk*2+2*Sk*－1=0

∴*Sk*= (舍)

由*Sk*+12=*ak*+1·(*Sk*+1－),得(*Sk*+*ak*+1)2=*ak*+1(*ak*+1+*Sk*－)



由①②知，*an*=对一切*n*∈**N**成立.

(3)由(2)得数列前*n*项和*Sn*=,∴*S*=*Sn*=0.

●锦囊妙记

(1)数学归纳法的基本形式

设*P*(*n*)是关于自然数*n*的命题，若

1°*P*(*n*0)成立(奠基)

2°假设*P*(*k*)成立(*k*≥*n*0)，可以推出*P*(*k*+1)成立(归纳)，则*P*(*n*)对一切大于等于*n*0的自然数*n*都成立.

(2)数学归纳法的应用

具体常用数学归纳法证明：恒等式，不等式，数的整除性，几何中计算问题，数列的通项与和等.

●歼灭难点训练

一、选择题

1.(★★★★★)已知*f*(*n*)=(2*n*+7)·3*n*+9,存在自然数*m*,使得对任意*n*∈**N**,都能使*m*整除*f*(*n*)，则最大的*m*的值为( )

A.30 B.26 C.36 D.6

2.(★★★★)用数学归纳法证明3*k*≥*n*3(*n*≥3,*n*∈**N**)第一步应验证( )

A.*n*=1 B.*n*=2 C.*n*=3 D.*n*=4

二、填空题

3.(★★★★★)观察下列式子：…则可归纳出\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

4.(★★★★)已知*a*1=,*an*+1=,则*a*2,*a*3,*a*4,*a*5的值分别为\_\_\_\_\_\_\_\_\_，由此猜想*an*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

三、解答题

5.(★★★★)用数学归纳法证明4+3*n*+2能被13整除，其中*n*∈**N**\*.

6.(★★★★)若*n*为大于1的自然数，求证：.

7.(★★★★★)已知数列{*bn*}是等差数列，*b*1=1,*b*1+*b*2+…+*b*10=145.

(1)求数列{*bn*}的通项公式*bn*;

(2)设数列{*an*}的通项*an*=log*a*(1+)(其中*a*＞0且*a*≠1)记*Sn*是数列{*an*}的前*n*项和，试比较*Sn*与log*abn*+1的大小，并证明你的结论.

8.(★★★★★)设实数*q*满足|*q*|＜1,数列{*an*}满足：*a*1=2,*a*2≠0,*an*·*an*+1=－*qn*,求*an*表达式，又如果*S*2*n*＜3,求*q*的取值范围.

参考答案

难点磁场

解：假设存在*a*、*b*、*c*使题设的等式成立，这时令*n*=1,2,3,有

于是，对*n*=1,2,3下面等式成立

1·22+2·32+…+*n*(*n*+1)2=

记*Sn*=1·22+2·32+…+*n*(*n*+1)2

设*n*=*k*时上式成立，即*Sk*= (3*k*2+11*k*+10)

那么*Sk*+1=*Sk*+(*k*+1)(*k*+2)2=(*k*+2)(3*k*+5)+(*k*+1)(*k*+2)2

= (3*k*2+5*k*+12*k*+24)

=［3(*k*+1)2+11(*k*+1)+10］

也就是说，等式对*n*=*k*+1也成立.

综上所述，当*a*=3,*b*=11,*c*=10时，题设对一切自然数*n*均成立.

歼灭难点训练

一、1.解析：∵*f*(1)=36,*f*(2)=108=3×36,*f*(3)=360=10×36

∴*f*(1),*f*(2),*f*(3)能被36整除，猜想*f*(*n*)能被36整除.

证明：*n*=1,2时，由上得证，设*n*=*k*(*k*≥2)时，

*f*(*k*)=(2*k*+7)·3*k*+9能被36整除，则*n*=*k*+1时，

*f*(*k*+1)－*f*(*k*)=(2*k*+9)·3*k*+1－(2*k*+7)·3*k*

=(6*k*+27)·3*k*－(2*k*+7)·3*k*

=(4*k*+20)·3*k*=36(*k*+5)·3*k*－2(*k*≥2)

*f*(*k*+1)能被36整除

∵*f*(1)不能被大于36的数整除，∴所求最大的*m*值等于36.

答案：C

2.解析：由题意知*n*≥3，∴应验证*n*=3.

答案：C

二、3.解析：



(*n*∈**N**\*)

(*n*∈**N**\*)



、、、 

三、5.证明：(1)当*n*=1时，42×1+1+31+2=91能被13整除

(2)假设当*n*=*k*时，42*k*+1+3*k*+2能被13整除，则当*n*=*k*+1时，

42(*k*+1)+1+3*k*+3=42*k*+1·42+3*k*+2·3－42*k*+1·3+42*k*+1·3

=42*k*+1·13+3·(42*k*+1+3*k*+2)

∵42*k*+1·13能被13整除，42*k*+1+3*k*+2能被13整除

∴当*n*=*k*+1时也成立.

由①②知，当*n*∈**N**\*时，42*n*+1+3*n*+2能被13整除.

6.证明：(1)当*n*=2时，

(2)假设当*n*=*k*时成立，即



7.(1)解：设数列{*bn*}的公差为*d*,由题意得,∴*bn*=3*n*－2

(2)证明：由*bn*=3*n*－2知

*Sn*=log*a*(1+1)+log*a*(1+)+…+log*a*(1+)

=log*a*［(1+1)(1+)…(1+ )］

而log*abn*+1=log*a*,于是，比较*Sn*与log*abn*+1的大小比较(1+1)(1+)…(1+)与**的大小.

取*n*=1，有(1+1)=

取*n*=2，有(1+1)(1+

推测：(1+1)(1+)…(1+)＞** (\*)

①当*n*=1时，已验证(\*)式成立.

②假设*n*=*k*(*k*≥1)时(\*)式成立，即(1+1)(1+)…(1+)＞**

则当*n*=*k*+1时，





,即当*n*=*k*+1时，(\*)式成立

由①②知，(\*)式对任意正整数*n*都成立.

于是，当*a*＞1时，*Sn*＞log*abn*+1,当 0＜*a*＜1时，*Sn*＜log*abn*+1

8.解：∵*a*1·*a*2=－*q*,*a*1=2,*a*2≠0,

∴*q*≠0,*a*2=－,

∵*an*·*an*+1=－*qn*,*an*+1·*an*+2=－*qn*+1

两式相除，得,即*an*+2=*q*·*an*

于是，*a*1=2,*a*3=2·*q*,*a*5=2·*qn*…猜想：*a*2*n*+1=－*qn*(*n*=1,2,3,…)

综合①②，猜想通项公式为*an*=

下证：(1)当*n*=1,2时猜想成立

(2)设*n*=2*k*－1时，*a*2*k*－1=2·*qk*－1则*n*=2*k*+1时，由于*a*2*k*+1=*q*·*a*2*k*－1

∴*a*2*k*+1=2·*qk*即*n*=2*k*－1成立.

可推知*n*=2*k*+1也成立.

设*n*=2*k*时，*a*2*k*=－*qk*,则*n*=2*k*+2时，由于*a*2*k*+2=*q*·*a*2*k*,

所以*a*2*k*+2=－*qk*+1,这说明*n*=2*k*成立，可推知*n*=2*k*+2也成立.

综上所述，对一切自然数*n*,猜想都成立.

这样所求通项公式为*an*=

*S*2*n*=(*a*1+*a*3…+*a*2*n*－1)+(*a*2+*a*4+…+*a*2*n*)

=2(1+*q*+*q*2+…+*qn*-1)－ (*q*+*q*2+…+*qn*)



由于|*q*|＜1,∴=

依题意知＜3,并注意1－*q*＞0,|*q*|＜1解得－1＜*q*＜0或0＜*q*＜