**数学归纳法知识点总结-高中数学选修2-2第二章**

归纳是一种有特殊事例导出一般原理的思维方法。归纳推理分完全归纳推理与不完全归纳推理两种。不完全归纳推理只根据一类事物中的部分对象具有的共同性质，推断该类事物全体都具有的性质，这种推理方法，在数学推理论证中是不允许的。完全归纳推理是在考察了一类事物的全部对象后归纳得出结论来。

数学归纳法是用来证明某些与自然数有关的数学命题的一种推理方法，在解数学题中有着广泛的应用。它是一个递推的数学论证方法，论证的第一步是证明命题在n＝1(或n)时成立，这是递推的基础；第二步是假设在n＝k时命题成立，再证明n＝k＋1时命题也成立，这是无限递推下去的理论依据，它判断命题的正确性能否由特殊推广到一般，实际上它使命题的正确性突破了有限，达到无限。这两个步骤密切相关，缺一不可，完成了这两步，就可以断定“对任何自然数（或n≥n且n∈N）结论都正确”。由这两步可以看出，数学归纳法是由递推实现归纳的，属于完全归纳。

运用数学归纳法证明问题时，关键是n＝k＋1时命题成立的推证，此步证明要具有目标意识，注意与最终要达到的解题目标进行分析比较，以此确定和调控解题的方向，使差异逐步减小，最终实现目标完成解题。

运用数学归纳法，可以证明下列问题：与自然数n有关的恒等式、代数不等式、三角不等式、数列问题、几何问题、整除性问题等等。

**Ⅰ、再现性题组：**

1. 用数学归纳法证明(n＋1)(n＋2)…(n＋n)＝2·1·2…(2n－1) （n∈N），从“k到k＋1”，左端需乘的代数式为\_\_\_\_\_。

A. 2k＋1 B. 2(2k＋1) C.  D. 

2. 用数学归纳法证明1＋＋＋…＋<n (n>1)时，由n＝k (k>1)不等式成立，推证n＝k＋1时，左边应增加的代数式的个数是\_\_\_\_\_。

A. 2 B. 2－1 C. 2 D. 2＋1

3. 某个命题与自然数n有关，若n＝k (k∈N)时该命题成立，那么可推得n＝k＋1时该命题也成立。现已知当n＝5时该命题不成立，那么可推得\_\_\_\_\_\_。 (94年上海高考)

A.当n＝6时该命题不成立 B.当n＝6时该命题成立

C.当n＝4时该命题不成立 D.当n＝4时该命题成立

4. 数列{a}中，已知a＝1，当n≥2时a＝a＋2n－1，依次计算a、a、a后，猜想a的表达式是\_\_\_\_\_。

A. 3n－2 B. n C. 3 D. 4n－3

5. 用数学归纳法证明3＋5 (n∈N)能被14整除，当n＝k＋1时对于式子3＋5应变形为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

6. 设k棱柱有f(k)个对角面，则k＋1棱柱对角面的个数为f(k+1)＝f(k)＋\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

【简解】1小题：n＝k时，左端的代数式是(k＋1)(k＋2)…(k＋k),n＝k＋1时，左端的代数式是(k＋2)(k＋3)…(2k＋1)(2k＋2)，所以应乘的代数式为，选B；

2小题：（2－1）－（2－1）＝2，选C；

3小题：原命题与逆否命题等价，若n＝k＋1时命题不成立，则n＝k命题不成立，选C。

4小题：计算出a＝1、a＝4、a＝9、a＝16再猜想a，选B；

5小题：答案（3＋5）3＋5（5－3）；

6小题：答案k－1。

**Ⅱ、示范性题组：**

1. 已知数列，得，…，，…。S为其前n项和，求S、S、S、S，推测S公式，并用数学归纳法证明。 （93年全国理）

【解】 计算得S＝，S＝，S＝，S＝ ，

猜测S＝ (n∈N)。

当n＝1时，等式显然成立；

假设当n＝k时等式成立，即：S＝，

当n＝k＋1时，S＝S＋

＝＋

＝

＝＝,

由此可知，当n＝k＋1时等式也成立。

综上所述，等式对任何n∈N都成立。

【注】 把要证的等式S＝作为目标，先通分使分母含有(2k＋3)，再考虑要约分，而将分子变形，并注意约分后得到（2k＋3）－1。这样证题过程中简洁一些，有效地确定了证题的方向。本题的思路是从试验、观察出发，用不完全归纳法作出归纳猜想，再用数学归纳法进行严格证明，这是关于探索性问题的常见证法，在数列问题中经常见到。 假如猜想后不用数学归纳法证明，结论不一定正确，即使正确，解答过程也不严密。必须要进行三步：试值 → 猜想 → 证明。

【另解】 用裂项相消法求和：

由a＝＝－得，

S＝（1－）＋（－）＋……＋－＝1－

＝。

此种解法与用试值猜想证明相比，过程十分简单，但要求发现＝－的裂项公式。可以说，用试值猜想证明三步解题，具有一般性。

例2. 设a＝＋＋…＋ (n∈N),证明：n(n＋1)<a< (n＋1) 。

【分析】与自然数n有关，考虑用数学归纳法证明。n＝1时容易证得，n＝k＋1时，因为a＝a＋,所以在假设n＝k成立得到的不等式中同时加上，再与目标比较而进行适当的放缩求解。

【解】 当n＝1时，a＝，n(n+1)＝， (n+1)＝2 ，

∴ n＝1时不等式成立。

假设当n＝k时不等式成立，即：k(k＋1)<a< (k＋1) ，

当n＝k＋1时，k(k＋1)＋<a<(k＋1)＋,

k(k＋1)＋>k(k＋1)＋(k＋1)＝(k＋1)(k＋3)>(k＋1)(k＋2)，

(k＋1)＋＝(k＋1)＋<(k＋1)＋(k＋)＝(k＋2)，

所以(k＋1)(k＋2) <a<(k＋2)，即n＝k＋1时不等式也成立。

综上所述，对所有的n∈N，不等式n(n＋1)<a<(n＋1)恒成立。

【注】 用数学归纳法解决与自然数有关的不等式问题，注意适当选用放缩法。本题中分别将缩小成(k＋1)、将放大成(k＋)的两步放缩是证n＝k＋1时不等式成立的关键。为什么这样放缩，而不放大成(k＋2)，这是与目标比较后的要求，也是遵循放缩要适当的原则。

本题另一种解题思路是直接采用放缩法进行证明。主要是抓住对的分析，注意与目标比较后，进行适当的放大和缩小。解法如下：由>n可得，a>1＋2＋3＋…＋n＝n(n＋1)；由<n＋可得，a<1＋2＋3＋…＋n＋×n＝n(n＋1)＋n＝(n＋2n)<(n＋1)。所以n(n＋1)<a<(n＋1)。

例3. 设数列{a}的前n项和为S，若对于所有的自然数n，都有S＝，证明{a}是等差数列。 （94年全国文）

【分析】 要证明{a}是等差数列，可以证明其通项符合等差数列的通项公式的形式，即证：a＝a＋(n－1)d 。命题与n有关，考虑是否可以用数学归纳法进行证明。

【解】 设a－a＝d，猜测a＝a＋(n－1)d

当n＝1时，a＝a， ∴ 当n＝1时猜测正确。

当n＝2时，a＋(2－1)d＝a＋d＝a， ∴当n＝2时猜测正确。

假设当n＝k（k≥2）时，猜测正确，即：a＝a＋(k－1)d ，

当n＝k＋1时，a＝S－S＝－，

将a＝a＋(k－1)d代入上式， 得到2a＝(k＋1)(a＋a)－2ka－k(k－1)d，

整理得(k－1)a＝(k－1)a＋k(k－1)d，

因为k≥2,所以a＝a＋kd，即n＝k＋1时猜测正确。

综上所述，对所有的自然数n，都有a＝a＋(n－1)d，从而{a}是等差数列。

【注】 将证明等差数列的问题转化成证明数学恒等式关于自然数n成立的问题。在证明过程中a的得出是本题解答的关键，利用了已知的等式S＝、数列中通项与前n项和的关系a＝S－S建立含a的方程，代入假设成立的式子a＝a＋(k－1)d解出来a。另外本题注意的一点是不能忽视验证n＝1、n＝2的正确性，用数学归纳法证明时递推的基础是n＝2时等式成立，因为由(k－1)a＝(k－1)a＋k(k－1)d得到a＝a＋kd的条件是k≥2。

【另解】 可证a －a＝ a－ a对于任意n≥2都成立：当n≥2时，a＝S－S＝－；同理有a＝S－S＝－；从而a－a＝－n(a＋a)＋，整理得a －a＝ a－ a，从而{a}是等差数列。

一般地，在数列问题中含有a与S时，我们可以考虑运用a＝S－S的关系，并注意只对n≥2时关系成立，象已知数列的S求a一类型题应用此关系最多。

**Ⅲ、巩固性题组：**

1. 用数学归纳法证明：6＋1 (n∈N)能被7整除。
2. 用数学归纳法证明： 1×4＋2×7＋3×10＋…＋n(3n＋1)＝n(n＋1) (n∈N)。
3. n∈N，试比较2与(n＋1)的大小，并用证明你的结论。
4. 用数学归纳法证明等式：cos·cos·cos·…·cos＝ (81年全国高考)
5. 用数学归纳法证明： |sinnx|≤n|sinx| （n∈N）。 （85年广东高考）

6. 数列{a}的通项公式a＝ (n∈N)，设f(n)＝(1－a)(1－a)…(1－a)，试求f(1)、f(2)、f(3)的值，推测出f(n)的值，并用数学归纳法加以证明。

1. 已知数列{a}满足a＝1，a＝acosx＋cos[(n－1)x]， (x≠kπ，n≥2且n∈N)。

①．求a和a； ②.猜测a，并用数学归纳法证明你的猜测。

8. 设f(logx)＝ , ①.求f(x)的定义域； ②.在y＝f(x)的图像上是否存在两个不同点，使经过这两点的直线与x轴平行？证明你的结论。 ③.求证：f(n)>n (n>1且n∈N)