**定积分的简单应用解题方法与技巧-高中数学选修2-2第一章**

**［特别提醒］**

1．研究定积分在平面几何中的应用，其实质就是全面理解定积分的几何意义，当平面图形的曲边在轴上方时，容易转化为定积分求其面积；当平面图形的一部分在轴下方时，其在轴下的部分对应的定积分为负值，应取其相反数（或绝对值）；

2．求含有曲边的平面图形的面积问题时，在平面几何中是很难解决的问题，而定积分为这类问题的求解提供了很好的解决方法，这充分显示了定积分的巨大作用；

3．利用定积分解决简单的物理问题，关键是要结合物理学中的相关内容，将物理意义转化为用定积分解决.

**例1．**求抛物线与直线围成的平面图形的面积.

**［剖析］**先求出抛物线与直线的交点，将积分区间确定，再求定积分。

**［解］**由方程组解出抛物线和直线的交点为（2, 2）及（8, －4）

**解法1:**选*x*作为积分变量，由图可看出S=*A*1+*A*2

在A1部分：由于抛物线的上半支方程为，下半支方程为，所以



（ ）

8,-4

8

（

）

2

,

2



于是：.

**解法二:** 选*y*作积分变量，将曲线方程写为及

.

**［警示］**对于求平面图形的面积问题，应首先画出平面图形的大概图形，然后根据图形的特点，选择相应的积分变量以确定积分区间，写出图形面积的积分表达式，再进行求解。

**［变式训练］：**

1．求由曲线与围成的平面图形的面积.

**例2**．已知函数在x=1处有极值-2

（1）求常数*a*、b；

（2）求曲线y=f(x)与x轴所包围的面积。

**［剖析］**利用待定系数法求出的值，以便于确定函数的解析式，再将*y=f(x)*与y=0联立，以确定积分区间，利用定积分求平面图形的面积。

**［解］**（1），由f(1)=－2及f′(1)=0得：，解得；

（2）由（1）知

　　∴当或时，f(x)<0，当或时，f(x)>0，

　　∴曲线*y=f(x)*与x轴所包围的面积：

 .

**［警示］**要把定积分与利用定积分计算平面图形的面积这两个概念区分开，定积分是一种积分和的极限，可正，也可以为负数或零；而平面图形的面积在一般意义下总是为正，因此当时，要通过绝对值处理成正，一般情况下是借助定积分求出两个曲边梯形的面积，然后再相加。

**［变式训练］**

1. 求与直线及轴所围成图形的面积。

**例3**．物体A以速度在一直线上运动，在此直线上与物体A出发的同时，物体B在物体A的正前方5m处以的速度与A同向运动，问当两物体何时相遇？相遇时物体A的走过的路程是多少？（时间单位为：s，速度单位为：m/s）

**［剖析］**对速度函数积分即可得物体A所走过的路程，从而根据题意建立方程进行求解。

**［解］**解：设A追上B时,所用的时间为依题意有

即，，，=5 (s)

所以 **==**130 (m)

因此5秒后两物体相遇，此时物体A走过了130米。

**［警示］**利用定积分解决物理问题，分清运动过程中的变化情况是解决问题的关键。应注意的是加速度的定积分是速度，速度的定积分是路程。

**［变式训练］**

**3.** 列车以速度72km/h行驶，当制动时列车获得的加速度，问列车应在进站前多少时候，以及多少距离处开始制动？

**例4．**直径为20cm，高为80cn的圆柱体内充满压强为10N/cm2的蒸气，设温度保持不变，要使蒸气的体积缩小为原来的一斗，求需要做多少功？

**［剖析］**对变力F进行定积分即可得变力所作的功。

**［解］**设上端为活塞，且如图所示取定轴.

*h*

*x*

F

O

另设底面面积为，活塞压缩至位置时气体的体积为，压强为，由于（其中为常数），则

，，

其中

故所求的功为

**［警示］**求变力作功问题，一般利用定积分加以解决，但要注意寻找积分变量与积分区间。

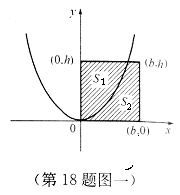
**［变式训练］**

**4．**证明：将质量为m的从地球表面升高至处的高空所做功为（其中是引力常数，是地球的质量，为地球半径）

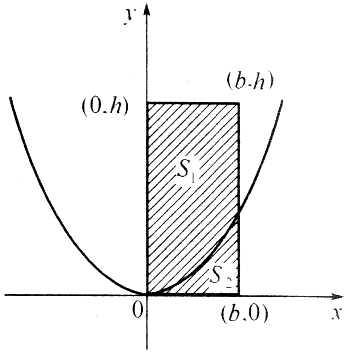
**例5．**已知抛物线，将以（0，0），（b，0），（b，h），（0，h）为顶点的矩形分成两部分，其面积之比为1：2，试求抛物线方程中的系数a

**［剖析］**由于点（b，h）的位置可以在曲线的上方可能在其下方，故应分两种情况加以讨论。

**［解］**如图分两种情况讨论：



（1）如图一：，

 ，由已知，解得.

（2）如图二：

，

　　由题意知：，解得。

**［警示］**对于积分区间不定的问题，应注意针对积分变量的不同进行分类讨论，解决此类问题的最好的办法是画出示意图，根据示意图进行探讨。

**［变式训练］**

**5．**设抛物线为过点A（－1,2）的抛物线C的切线，，求由曲线C、、所围成图形的面积。

**例6．**（2005年上海模拟）设是二次函数，方程有两个相等的实根，且

（1）求函数的表达式；

（2）若直线把的图象与两坐标轴围成的面积二等分，求的值。

**［剖析］**要求的值，根据题意，利用面积相等建立方程，通过解方程求出的值。

**［解］**（1）由于是二次函数，设，则，由已知得，即.

又因为有两个相等的实根，所以，即，

即

1. 依题意知：，

所以即

所以，即，于是

所以的值为

**［警示］**对于未知函数的解析式求定积分的问题，应根据题设条件先求出函数的解析式，然后再根据题意进行求解。

**［变式训练］**

**6．**已知点P在曲线上，它的横坐标为，由点P作曲线的切线为切点）。

（1）求切的方程；

（2）求证：由上述切线与所围成图形的面积S与无关。