**生活中的优化问题举例题库及答案-高中数学选修2-2第一章**

一、选择题

1．内接于半径为*R*的球且体积最大的圆锥的高为(　　)

A．*R*　　　　 B．2*R*

C.*R*　　　 D.*R*

[答案]　C

[解析]　设圆锥高为*h*，底面半径为*r*，则*R*2＝(*R*－*h*)2＋*r*2，∴*r*2＝2*Rh*－*h*2

∴*V*＝π*r*2*h*＝*h*(2*Rh*－*h*2)＝π*Rh*2－*h*3

*V*′＝π*Rh*－π*h*2.令*V*′＝0得*h*＝*R*.

当0<*h*<*R*时，*V*′>0；当<*h*<2*R*时，*V*′<0.

因此当*h*＝*R*时，圆锥体积最大．故应选C.

2．若底面为等边三角形的直棱柱的体积为*V*，则其表面积最小时，底面边长为(　　)

A. B.

C. D．2

[答案]　C

[解析]　设底面边长为*x*，则*V*＝*x*2*h*，∴*h*＝ .

∴*S*表＝2×*x*2＋3*x*·＝*x*2＋，

∴*S*′表＝*x*－，令*S*′表＝0得*x*＝.

当0<*x*<时，*S*′<0；*x*>时，*S*′>0.

因此当底边长为时，其表面积最小．

3．某公司生产某种产品，固定成本为20000元，每生产一单位产品，成本增加100元，已知总收益*R*与产量*x*的关系式*R*(*x*)＝则总利润最大时，每年生产的产品是(　　)

A．100 B．150

C．200 D．300

[答案]　D

[解析]　由题意，总成本为*C*＝20000＋100*x*.

所以总利润为*P*＝*R*－*C*

＝

∴*P*′＝

令*P*′＝0，得*x*＝300，

当0<*x*<300时，*P*′>0，当300<*x*<400时，*P*′<0，分析可知当*x*＝300时，取得最大值，故应选D.

4．用长为18m的钢条围成一个长方体形状的框架，要求长方体的长与宽之比为21，则该长方体的最大体积为(　　)

A．2m3 B．3m3

C．4m3 D．5m3

[答案]　B

[解析]　设长方体的宽为*x*(m)，则长为2*x*(m)，高为*h*＝＝4.5－3*x*(m)

故长方体的体积为

*V*(*x*)＝2*x*2(4.5－3*x*)＝9*x*2－6*x*3

从而*V*′(*x*)＝18*x*－18*x*2＝18*x*(1－*x*)

令*V*′(*x*)＝0，解得*x*＝1或*x*＝0(舍去)

当0<*x*<1时，*V*′(*x*)>0；当1<*x*<时，*V*′(*x*)<0

故在*x*＝1处*V*(*x*)取得极大值，并且这个极值就是*V*(*x*)的最大值

从而最大体积*V*＝*V*(1)＝9×12－6×13＝3(m2)．

5．若球的半径为*R*，作内接于球的圆柱，则其侧面积的最大值为(　　)

A．2π*R*2 B．π*R*2

C．4π*R*2 D.π*R*2

[答案]　A

[解析]　设内接圆柱的高为*h*，底面半径为*x*，

则*x*＝

∴*S*侧＝2π*xh*＝2π*h*＝2π

令*t*＝*R*2*h*2－，则*t*′＝2*R*2*h*－*h*3

令*t*′＝0，则*h*＝*R*

当0<*h*<*R*时，*t*′>0，当*R*<*h*<2*R*时，*t*′<0，

所以当*h*＝*R*时，圆柱侧面积最大．

∴侧面积最大值为2π＝2π*R*2，故应选A.

6．(2010·山东文，8)已知某生产厂家的年利润*y*(单位：万元)与年产量*x*(单位：万件)的函数关系式为*y*＝－*x*3＋81*x*－234，则使该生产厂家获取最大的年利润的年产量为(　　)

A．13万件 B．11万件

C．9万件 D．7万件

[答案]　C

[解析]　本题考查了导数的应用及求导运算．

∵*x*>0，*y*′＝－*x*2＋81＝(9－*x*)(9＋*x*)，

令*y*′＝0，解得*x*＝9，所以*x*∈(0,9)时，*y*′>0，

*x*∈(9，＋∞)时，*y*′<0，*y*先增后减．

∴*x*＝9时函数取最大值，选C，属导数法求最值问题．

7．内接于半径为*R*的半圆的矩形中，周长最大的矩形的边长为(　　)

A.和*R* B.*R*和*R*

C.*R*和*R* D．以上都不对

[答案]　B

[解析]　设矩形一边的长为*x*，

则另一边长为2，

则*l*＝2*x*＋4(0<*x*<*R*)，

*l*′＝2－，

令*l*′＝0，解得*x*1＝*R*，*x*2＝－*R*(舍去)．

当0<*x*<*R*时，*l*′>0；当*R*<*x*<*R*时，*l*′<0.

所以当*x*＝*R*时，*l*取最大值，即周长最大的矩形的边长为*R*，*R*.

8．要做一个圆锥形的漏斗，其母线长为20cm，要使其体积最大，则高为(　　)

A.cm B.cm

C.cm D.cm

[答案]　D

[解析]　设圆锥的高为*x*，则底面半径为，

其体积为*V*＝π*x*(202－*x*2)(0<*x*<20)，

*V*′＝π(400－3*x*2)，

令*V*′＝0，解得*x*1＝，*x*2＝－舍去．

当0<*x*<时，*V*′>0；当<*x*<20时，*V*′<0.所以当*x*＝时，*V*取得最大值．

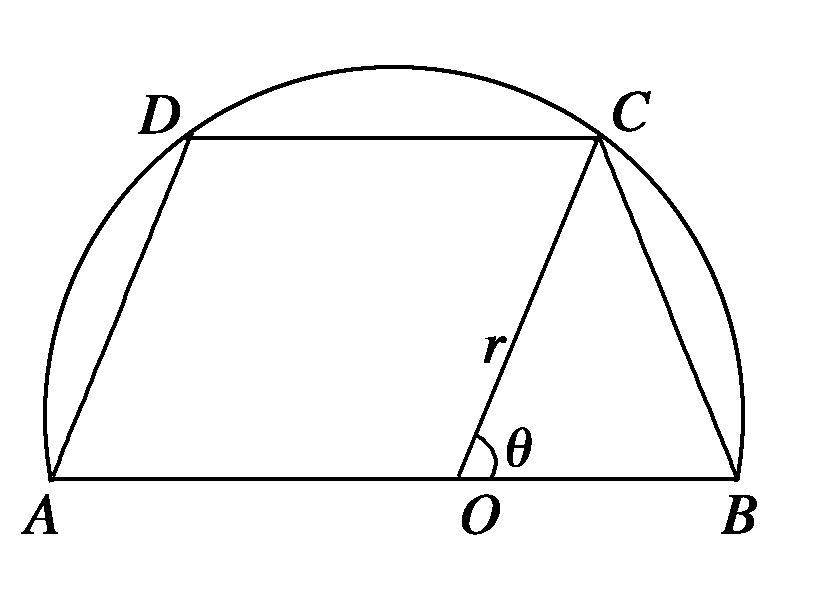
9．在半径为*r*的半圆内作一内接梯形，使其底为直径，其他三边为圆的弦，则梯形面积最大时，其梯形的上底为(　　)

A. B.*r*

C.*r* D．*r*

[答案]　D

[解析]　如下图所示，为圆及其内接梯形，设∠*COB*＝*θ*，则*CD*＝2*r*cos*θ*，*h*＝*r*sin*θ*，



∴*S*＝·*r*sin*θ*＝*r*2sin*θ*(1＋cos*θ*)

∴*S*′＝*r*2[cos*θ*(1＋cos*θ*)－sin2*θ*]

＝*r*2(2cos2*θ*＋cos*θ*－1)

令*S*′＝0得cos*θ*＝－1(舍去)或cos*θ*＝.

即当cos*θ*＝时，梯形面积最大，此时上底*CD*＝2*r*cos*θ*＝*r*.故应选D.

10．某厂生产某种产品*x*件的总成本：*C*(*x*)＝1200＋*x*3，又产品单价的平方与产品件数*x*成反比，生产100件这样的产品的单价为50元，总利润最大时，产量应定为(　　)

A．25件 B．20件

C．15件 D．30件

[答案]　A

[解析]　设产品单价为*a*元，又产品单价的平方与产品件数*x*成反比，即*a*2*x*＝*k*，由题知*k*＝250000，则*a*2*x*＝250000，所以*a*＝.

总利润*y*＝500－*x*3－1200(*x*>0)，

*y*′＝－*x*2，

由*y*′＝0，得*x*＝25，当*x*∈(0,25)时，*y*′>0，

*x*∈(25，＋∞)时，*y*′<0，所以*x*＝25时，*y*取最大值．

二、填空题

11．某工厂需要围建一个面积为512平方米的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁，当墙壁所用的材料最省时堆料场的长和宽分别为\_\_\_\_\_\_\_\_．

[答案]　32m,16m

[解析]　设长，宽分别为*a*，*b*，则*ab*＝512，且*l*＝*a*＋2*b*，∴*l*＝2*b*＋，∴*l*′＝2－，

令*l*′＝0得*b*2＝256，∴*b*＝16，*a*＝32.

即当长、宽分别为32m、16m时最省材料．

12．容积为256L的方底无盖水箱，它的高为\_\_\_\_\_\_\_\_时最省材料．

[答案]　4

[解析]　设水箱高为*h*，底面边长为*a*，则*a*2*h*＝256，其面积为*S*＝*a*2＋4*ah*＝*a*2＋4*a*·＝*a*2＋.

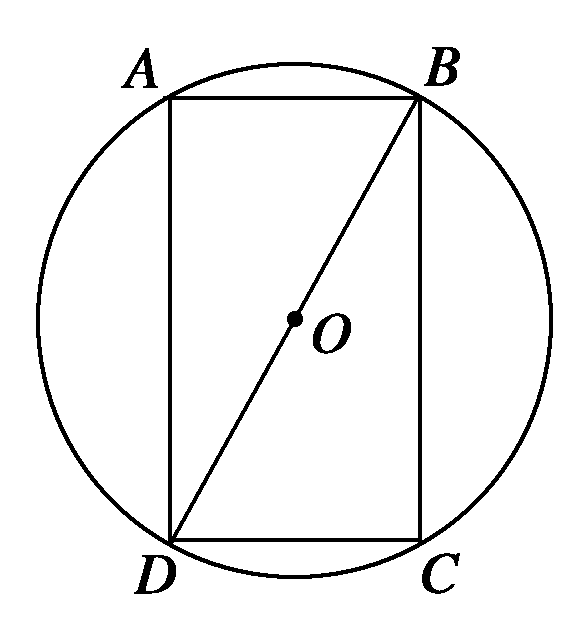
令*S*′＝2*a*－＝0，得*a*＝8.

当0<*a*<8时，*S*′<0；当*a*>8时，*S*′>0；当*a*＝8时，*S*最小，此时*h*＝＝4.

13．内接于半径为*R*的球，且体积最大的圆柱的高为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[答案]　*R*

[解析]　如图，*ABCD*为球面内接圆柱的轴截面，*BD*＝2*R*，设圆柱的高为*x*，则圆柱底面半径为*r*＝，

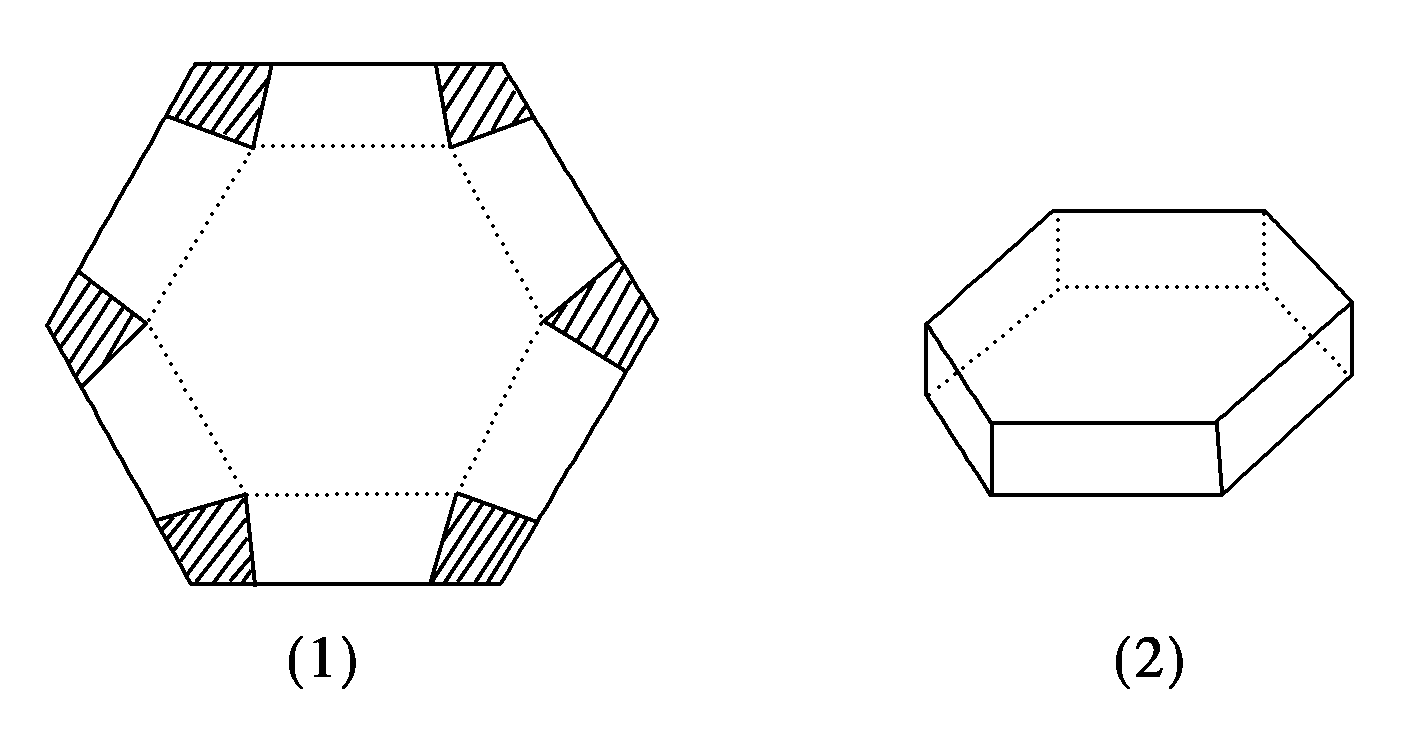


圆柱体积*V*＝π*r*2*x*＝(4*R*2－*x*2)*x*(0<*x*<2*R*)

令*V*′＝(4*R*2－3*x*2)＝0得*x*＝*R*.

因为*V*(*x*)只有一个极值，所以当圆柱的高为*R*时，球内接圆柱体积最大．

14．如图(1)，将边长为1的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形，再沿虚线折起，做成一个无盖的正六棱柱容器(图(2))．当这个正六棱柱容器的底面边长为\_\_\_\_\_\_\_\_时，其容积最大．



[答案]

[解析]　设四边形较短边为*x*，则较长边为*x*，正六棱柱底面边长为1－2*x*，高为*x*，

∴*V*＝6××sin60°×(1－2*x*)2×*x*＝*x*(1－2*x*)2.

*V*′＝(1－2*x*)(1－6*x*)，

令*V*′＝0，得*x*＝或*x*＝(舍去)．

当0<*x*<时，*V*′>0；当<*x*<时，*V*′<0.

因此当*x*＝时，*V*有最大值，此时底面边长为1－2×＝.

三、解答题

15．一艘轮船在航行中燃料费和它的速度的立方成正比．已知速度为每小时10千米时，燃料费是每小时6元，而其它与速度无关的费用是每小时96元，问轮船的速度是多少时，航行1千米所需的费用总和为最小？

[解析]　设速度为每小时*v*千米的燃料费是每小时*p*元，那么由题设的比例关系得*p*＝*k*·*v*3，其中*k*为比例常数，它可以由*v*＝10，*p*＝6求得，即*k*＝＝0.006.于是有*p*＝0.006*v*3.

又设当船的速度为每小时*v*千米时，行1千米所需的总费用为*q*元，那么每小时所需的总费用是0.006*v*3＋96(元)，而行1千米所需用时间为小时，所以行1千米的总费用为

*q*＝(0.006*v*3＋96)＝0.006*v*2＋.

*q*′＝0.012*v*－＝(*v*3－8000)，

令*q*′＝0，解得*v*＝20.

因当*v*＜20时，*q*′＜0；当*v*＞20时，*q*′＞0，所以当*v*＝20时取得最小值．

即当速度为20千米/小时时，航行1千米所需费用总和最小．

16．(2009·湖南理，19)某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两墩相距*m*米，余下工程只需建两端桥墩之间的桥面和桥墩．经测算，一个桥墩的工程费用为256万元；距离为*x*米的相邻两墩之间的桥面工程费用为(2＋)*x*万元．假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其它因素．记余下工程的费用为*y*万元．

(1)试写出*y*关于*x*的函数关系式；

(2)当*m*＝640米时，需新建多少个桥墩才能使*y*最小？

[分析]　考查函数的性质和导数的运算及利用导数研究函数性质的能力和解决实际应用问题的能力．

[解析]　(1)设需新建*n*个桥墩，则(*n*＋1)*x*＝*m*，

即*n*＝－1，

所以*y*＝*f*(*x*)＝256*n*＋(*n*＋1)(2＋)*x*

＝256＋(2＋)*x*

＝＋*m*＋2*m*－256.

(2)由(1)知，*f*′(*x*)＝－＋*mx*－＝(*x*－512)．

令*f*′(*x*)＝0，得*x*＝512，所以*x*＝64.

当0<*x*<64时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)在区间(0,64)内为减函数，

当64<*x*<640时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)在区间(64,640)内为增函数．

所以*f*(*x*)在*x*＝64处取得最小值，此时*n*＝－1＝－1＝9，

故需新建9个桥墩才能使*y*最小．

17．(2010·湖北理，17)为了在夏季降温和冬季供暖时减少能源损耗 ，房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层，某幢建筑物要建造可使用20年的隔热层，每厘米厚的隔热层建造成本为6万元．该建筑物每年的能源消耗费用*C*(单位：万元)与隔热层厚度*x*(单位：cm)满足关系：*C*(*x*)＝(0≤*x*≤10)，若不建隔热层，每年能源消耗费用为8万元．设*f*(*x*)为隔热层建造费用与20年的能源消耗费用之和．

(1)求*k*的值及*f*(*x*)的表达式．

(2)隔热层修建多厚时，总费用*f*(*x*)达到最小，并求最小值．

[解析]　(1)设隔热层厚度为*x* cm，由题设，每年能源消耗费用为*C*(*x*)＝，

再由*C*(0)＝8，得*k*＝40，因此*C*(*x*)＝，

而建造费用为*C*1(*x*)＝6*x*.

最后得隔热层建造费用与20年的能源消耗费用之和为*f*(*x*)＝20*C*(*x*)＋*C*1(*x*)＝20×＋6*x*＝＋6*x*(0≤*x*≤10)．

(2)*f* ′(*x*)＝6－，

令*f* ′(*x*)＝0，即＝6，

解得*x*＝5，*x*＝－(舍去)．

当0<*x*<5时，*f* ′(*x*)<0，当5<*x*<10时，*f* ′(*x*)>0，故*x*＝5是*f*(*x*)的最小值点，对应的最小值为*f*(5)＝6×5＋＝70.

当隔热层修建5 cm厚时，总费用达到最小值70万元．

18．(2009·山东理，21)两县城*A*和*B*相距20km，现计划在两县城外以*AB*为直径的半圆弧上选择一点*C*建造垃圾处理厂，其对城市的影响度与所选地点到城市的距离有关，对城*A*和城*B*的总影响度为城*A*与对城*B*的影响度之和．记*C*点到城*A*的距离为*x*km，建在*C*处的垃圾处理厂对城*A*和城*B*的总影响度为*y*.统计调查表明：垃圾处理厂对城*A*的影响度与所选地点到城*A*的距离的平方成反比，比例系数为4；对城*B*的影响度与所选地点到城*B*的距离的平方成反比，比例系数为*k*，当垃圾处理厂建在弧的中点时，对城*A*和城*B*的总影响度为0.065.

(1)将*y*表示成*x*的函数；

(2)讨论(1)中函数的单调性，并判断弧上是否存在一点，使建在此处的垃圾处理厂对城*A*和城*B*的总影响度最小？若存在，求出该点对城*A*的距离；若不存在，说明理由．

[解析]　(1)根据题意∠*ACB*＝90°，*AC*＝*x*km，*BC*＝km，

且建在*C*处的垃圾处理厂对城*A*的影响度为，对城*B*的影响度为，

因此，总影响度*y*为*y*＝＋(0<*x*<20)．

又因为垃圾处理厂建在弧的中点时，对城*A*和城*B*的总影响度为0.065，

所以＋＝0.065，

解得*k*＝9，所以*y*＝＋(0<*x*<20)．

(2)因为*y*′＝－＋

＝＝.

由*y*′＝0解得*x*＝4或*x*＝－4(舍去)．

易知4∈(0,20)．

*y*，*y*′随*x*的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | (0,4) | 4 | (4，20) |
| *y*′ | － | 0 | ＋ |
| *y* |  | 极小值 |  |

由表可知，函数在(0,4)内单调递减，在(4，20)内单调递增．

*y*最小值＝*y*|*x*＝4＝，此时*x*＝4，

故在上存在*C*点，使得建在此处的垃圾处理厂对城*A*和城*B*的总影响最小，该点与城*A*的距离*x*＝4km.