**生活中的优化问题举例试题及答案-高中数学选修2-2第一章**

一、选择题

1．某产品的销售收入*y*1(万元)是产量*x*(千台)的函数：*y*1＝17*x*2(*x*>0)，生产成本*y*2(万元)是产量*x*(千台)的函数：*y*2＝2*x*3－*x*2(*x*>0)，为使利润最大，应生产

(　　)

A．6千台　　　　　　　 B．7千台

C．8千台 D．9千台

【解析】　设利润为*y*，则*y*＝*y*1－*y*2＝17*x*2－(2*x*3－*x*2)＝－2*x*3＋18*x*2(*x*>0)，

又由*y*′＝－6*x*2＋36*x*＝0得*x*＝6，且当*x*∈(0,6)时，*y*′>0，当*x*∈(6，＋∞)时，*y*′<0，

∴当*x*＝6时，*y*最大，故应生产6千台．

【答案】　A

2．要做一个圆锥形漏斗，其母线长为20 cm，要使其体积最大，则其高为

(　　)

A. cm B．10 cm

C．15 cm D. cm

【解析】　设圆锥的高为*x*，则底面半径为，其体积*V*＝π*x*(202－*x*2)(0<*x*<20)．

*V*′＝(400－3*x*2)，令*V*′＝0得*x*＝，又当0<*x*<时，*V*′>0；<*x*<20时，*V*′<0，

∴当*x*＝时，*V*取最大值．

【答案】　D

3．某银行准备新设一种定期存款业务，经预算，存款量与存款利率的平方成正比，比例系数为*k*(*k*>0)．已知贷款的利率为0.048 6，且假设银行吸收的存款能全部放贷出去．设存款利率为*x*，*x*∈(0,0.048 6)，若使银行获得最大收益，则*x*的取值为(　　)

A．0.016 2　　　　　　　 B．0.032 4

C．0.024 3 D．0.048 6

【解析】　依题意，存款量是*kx*2，银行支付的利息是*kx*3，获得的贷款利息是0.048 6*kx*2，其中*x*∈(0,0.048 6)．所以银行的收益是*y*＝0.048 6*kx*2－*kx*3(0<*x*<0.048 6)，则*y*′＝0.097 2*kx*－3*kx*2.

令*y*′＝0，得*x*＝0.032 4或*x*＝0(舍去)．

当0<*x*<0.032 4时，*y*′>0；

当0.032 4<*x*<0.048 6时，*y*′<0.

所以当*x*＝0.032 4时，*y*取得最大值，即当存款利率为0.032 4时，银行获得最大收益．

【答案】　B

4．一火车锅炉每小时煤消耗费用与火车行驶速度的立方成正比，已知当速度为20 km/h时，每小时消耗的煤价值40元，其他费用每小时需200元，火车的最高速度为100 km/h，要使从甲城开往乙城的总费用最少，则速度应为(　　)

A．10 km/h B．20 km/h

C．5 km/h D. km/h

【解析】　设速度为*x* km/h，甲、乙两城距离为*a* km.

则总费用*f*(*x*)＝(*kx*3＋200)·＝*a*(*kx*2＋)．

由已知条件，得40＝*k*·203，∴*k*＝.

∴*f*(*x*)＝*a*(*x*2＋)．

由*f*′(*x*)＝＝0，得*x*＝10.

当0<*x*<10时，*f*′(*x*)<0；

当10<*x*<100时，*f*′(*x*)>0.

∴当*x*＝10时，*f*(*x*)有最小值，

即速度为10 km/h时，总费用最少．

【答案】　A

5．有一边长分别为8与5的长方形，各角剪去相同的小正方形，把四边折起做成一个无盖小盒，则小盒的最大容积是(　　)

A．20　　　 B．18

C．16　　　 D．14

【解析】　正方形边长为*x*，则

*V*＝(8－2*x*)·(5－2*x*)*x*＝2(2*x*3－13*x*2＋20*x*)(0<*x*<)．

*V*′＝4(3*x*2－13*x*＋10)(0<*x*<)．

*V*′＝0得*x*＝1，根据实际情况，小盒容积最大值是存在的，

∴当*x*＝1时，容积*V*取得最大值18.

【答案】　B

二、填空题

6．(2013·开封高二检测)做一个容积为256升的方底无盖水箱，那么用料最省时，它的底面边长为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【解析】　设底面边长为*x*分米，则高*h*＝，其表面积*s*＝*x*2＋，*s*′＝2*x*－，令*s*′＝0，则*x*＝8.

【答案】　8分米

7．已知矩形的两个顶点*A*、*D*位于*x*轴上，另两个顶点*BC*位于抛物线*y*＝4－*x*2在*x*轴上方的曲线上，则这个矩形的面积最大时的边长为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【解析】　由题意，设矩形边长*AD*＝2*x*，则*AB*＝4－*x*2，

∴矩形面积为*S*＝2*x*(4－*x*2)＝8*x*－2*x*3(0<*x*<2)．∴*S*′＝8－6*x*2.

令*S*′＝0，解之得*x*1＝，*x*2＝－(舍去)．

当0<*x*<时，*S*′>0；

当<*x*<2时，*S*′<0.

∴当*x*＝时，*S*取得最大值为.

即矩形的边长分别是，时，矩形的面积最大．

【答案】　，

8．某厂生产某种产品*x*件的总成本*C*(*x*)＝1200＋*x*3(万元)，已知产品单价的平方与产品件数成反比，生产100件这样的产品单价为50万元，则产量定为\_\_\_\_\_\_\_\_件时，总利润最大．

【解析】　设产品的单价为*p*万元，根据已知，可设*p*2＝，其中*k*为比例系数．因为当*x*＝100时，*p*＝50，所以*k*＝250 000，所以*p*2＝，*p*＝，*x*>0.

设总利润为*y*万元，则*y*＝·*x*－1 200－*x*3＝500－*x*3－1 200.

求导数得，*y*′＝－*x*2.

令*y*′＝0得*x*＝25.

故当*x*<25时，*y*′>0；

当*x*>25时，*y*′<0.

因此，当*x*＝25时，函数*y*取得极大值，也是最大值．

【答案】　25

三、解答题

9．某集团为了获得更大的收益，每年要投入一定的资金用于广告促销，经调查，每年投入广告费*t*(百万元)，可增加销售额约为－*t*2＋5*t*(百万元)(0≤*t*≤3)．

(1)若该公司将当年的广告费控制在3百万元之内，则应投入多少广告费，才能使该公司由此获得的收益最大？

(2)现该公司准备共投入3百万元，分别用于广告促销和技术改造，经预测，每投入技术改造费*x*百万元，可增加的销售额约为－*x*3＋*x*2＋3*x*(百万元)．请设计一个资金分配方案，使该公司由此获得的收益最大．(收益＝销售额－投入)

【解】　(1)设投入*t*(百万元)的广告费后增加的收益为*f*(*t*)，

则有*f*(*t*)＝(－*t*2＋5*t*)－*t*＝－*t*2＋4*t*＝－(*t*－2)2＋4(0≤*t*≤3)，

∴当*t*＝2时，*f*(*t*)取得最大值4，即投入2百万元的广告费时，该公司由此获得的收益最大．

(2)设用于技术改造的资金为*x*(百万元)，

则用于广告促销的资金为(3－*x*)(百万元)，又设由此获得的收益是*g*(*x*)(百万元)，

则*g*(*x*)＝(－*x*3＋*x*2＋3*x*)＋[－(3－*x*)2＋5(3－*x*)]－3

＝－*x*3＋4*x*＋3(0≤*x*≤3)，

∴*g*′(*x*)＝－*x*2＋4，

令*g*′(*x*)＝0，解得*x*＝－2(舍去)或*x*＝2.

又当0≤*x*<2时，*g*′(*x*)>0；当2<*x*≤3时，*g*′(*x*)<0，

∴当*x*＝2时，*g*(*x*)取得最大值，即将2百万元用于技术改造，1百万元用于广告促销，该公司由此获得的收益最大．

10．已知*A*，*B*两地相距200千米，一只船从*A*地逆水航行到*B*地，水流的速度为8千米/时，船在静水中的速度为*v*千米/时(8<*v*≤*v*0)．已知船每小时的燃料费与其在静水中的速度的平方成正比，当*v*＝12千米/时时，每小时的燃料费为720元，为了使全程燃料费最省，船的实际速度应为多少？

【解】　设全程燃料费为*y*，每小时的燃料费为*y*1，比例系数为*k*(*k*>0)，则*y*1＝*kv*2.

当*v*＝12时，*y*1＝720，所以720＝*k*·122，解得*k*＝5.

由题意，得*y*＝，

所以*y*′＝

＝.

令*y*′＝0，得*v*＝0(舍去)或*v*＝16，所以*v*＝16(千米/时)．

∵8<*v*≤*v*0，∴当*v*0≥16时，*v*＝16千米/时，全程燃料费最省，为32000元；

当*v*0<16时，*v*∈(8，*v*0]，*y*′<0，*y*在(8，*v*0]上是单调递减函数，

所以当*v*＝*v*0时，*y*有最小值，最小值为.

综上可知，当*v*0≥16，*v*＝16千米/时时，全程燃料费最省，为32000元；

当*v*0<16，*v*＝*v*0千米/时时，全程燃料费最省，为元．

11．某商场预计2012年1月份起前*x*个月，顾客对某商品的需求总量*p*(*x*)(单位：件)与*x*的关系近似地满足*p*(*x*)＝*x*(*x*＋1)(39－2*x*)(*x*∈**N**\*，*x*≤12)．该商品第*x*月的进货单价*q*(*x*)(单位：元)与*x*的近似关系是：

*q*(*x*)＝

(1)写出2012年第*x*月的需求量*f*(*x*)(单位：件)与*x*的函数关系式；

(2)该商品每件的售价为185元，若不计其他费用且每月都能满足市场需求，试问商场2012年哪个月销售该商品的月利润最大，最大月利润为多少元？

【解】　(1)当*x*＝1时，*f*(1)＝*p*(1)＝37，

当2≤*x*≤12，且*x*∈**N**\*时，

*f*(*x*)＝*p*(*x*)－*p*(*x*－1)

＝*x*(*x*＋1)(39－2*x*)－(*x*－1)*x*·(41－2*x*)＝－3*x*2＋40*x*，

验证*x*＝1时也符合，

∴*f*(*x*)＝－3*x*2＋40*x*(*x*∈**N**\*，且1≤*x*≤12)．

(2)该商场预计第*x*月销售该商品的月利润为*g*(*x*)＝

即*g*(*x*)＝

当1≤*x*≤6，且*x*∈**N**\*时，

*g*′(*x*)＝18*x*2－370*x*＋1 400，令*g*′(*x*)＝0，解得*x*＝5，*x*＝(舍去)．

当1≤*x*<5时，*g*′(*x*)>0，当5<*x*≤6时，*g*(*x*)′<0，

*g*(*x*)max＝*g*(5)＝3 125；

当7≤*x*≤12，且*x*∈**N**\*时，

*g*(*x*)＝－480*x*＋6 400是减函数，

当*x*＝7时，*g*(*x*)max＝*g*(7)＝3 040，

### 综上，商场2012年5月份的月利润最大，最大利润为3 125元.