**变化率与导数知识点总结-高中数学选修2-2第一章**

一、导数的概念

1．函数*y*＝*f*(*x*)在*x*＝*x*0处的导数

(1)定义：

称函数*y*＝*f*(*x*)在*x*＝*x*0处的瞬时变化率

＝ 为函数*y*＝*f*(*x*)在*x*＝*x*0处的导数，记作*f*′(*x*0)或*y*′|*x*＝*x*0，即*f*′(*x*0)＝ ＝ .

(2)几何意义：

函数*f*(*x*)在点*x*0处的导数*f*′(*x*0)的几何意义是在曲线*y*＝*f*(*x*)上点(*x*0，*f*(*x*0))处的切线的斜率(瞬时速度就是位移函数*s*(*t*)对时间*t*的导数)．相应地，切线方程为*y*－*f*(*x*0)＝*f*′(*x*0)(*x*－*x*0)．

2．函数*f*(*x*)的导函数

称函数*f*′(*x*)＝ 为*f*(*x*)的导函数．

二、基本初等函数的导数公式

|  |  |
| --- | --- |
| 原函数 | 导函数 |
| *f*(*x*)＝*c*(*c*为常数) | *f*′(*x*)＝0 |
| *f*(*x*)＝*xn*(*n*∈Q\*) | *f*′(*x*)＝*nxn*－1 |
| *f*(*x*)＝sin *x* | *f*′(*x*)＝cos\_*x* |
| *f*(*x*)＝cos *x* | *f*′(*x*)＝－sin\_*x* |
| *f*(*x*)＝*ax* | *f*′(*x*)＝*ax*ln\_*a* |
| *f*(*x*)＝e*x* | *f*′(*x*)＝e*x* |
| *f*(*x*)＝log*ax* | *f*′(*x*)＝ |
| *f*(*x*)＝ln *x* | *f*′(*x*)＝ |

三、导数的运算法则

1．[*f*(*x*)±*g*(*x*)]′＝*f*′(*x*)±*g*′(*x*)；

2．[*f*(*x*)·*g*(*x*)]′＝*f*′(*x*)*g*(*x*)＋*f*(*x*)*g*′(*x*)；

3.′＝(*g*(*x*)≠0)．

1．(教材习题改编)若*f*(*x*)＝*x*e*x*，则*f*′(1)＝(　　)

A．0　　　　　　　　　　 B．e

C．2e D．e2

解析：选C　∵*f*′(*x*)＝e*x*＋*x*e*x*，∴*f*′(1)＝2e.

2．曲线*y*＝*x*ln *x*在点(e，e)处的切线与直线*x*＋*ay*＝1垂直，则实数*a*的值为(　　)

A．2 B．－2

C. D．－

解析：选A　依题意得*y*′＝1＋ln *x*，*y*′*x*＝e＝1＋ln e＝2，所以－×2＝－1，*a*＝2.

3．(教材习题改编)某质点的位移函数是*s*(*t*)＝2*t*3－*gt*2(*g*＝10 m/s2)，则当*t*＝2 s时，它的加速度是(　　)

A．14 m/s2 B．4 m/s2

C．10 m/s2 D．－4 m/s2

解析：选A　由*v*(*t*)＝*s*′(*t*)＝6*t*2－*gt*，*a*(*t*)＝*v*′(*t*)＝12*t*－*g*，得*t*＝2时，*a*(2)＝*v*′(2)＝12×2－10＝14(m/s2)．

4．(2012·广东高考)曲线*y*＝*x*3－*x*＋3在点(1,3)处的切线方程为\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：∵*y*′＝3*x*2－1，∴*y*′*x*＝1＝3×12－1＝2.

∴该切线方程为*y*－3＝2(*x*－1)，即2*x*－*y*＋1＝0.

答案：2*x*－*y*＋1＝0

5．函数*y*＝*x*cos *x*－sin *x*的导数为\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：*y*′＝(*x*cos *x*)′－(sin *x*)′

＝*x*′cos *x*＋*x*(cos *x*)′－cos *x*

＝cos *x*－*x*sin *x*－cos *x*

＝－*x*sin *x*.

答案：－*x*sin *x*

　　1.函数求导的原则

对于函数求导，一般要遵循先化简，再求导的基本原则，求导时，不但要重视求导法则的应用，而且要特别注意求导法则对求导的制约作用，在实施化简时，首先必须注意变换的等价性，避免不必要的运算失误．

2．曲线*y*＝*f*(*x*)“在点*P*(*x*0，*y*0)处的切线”与“过点*P*(*x*0，*y*0)的切线”的区别与联系

(1)曲线*y*＝*f*(*x*)在点*P*(*x*0，*y*0)处的切线是指*P*为切点，切线斜率为*k*＝*f*′(*x*0)的切线，是唯一的一条切线．

(2)曲线*y*＝*f*(*x*)过点*P*(*x*0，*y*0)的切线，是指切线经过*P*点．点*P*可以是切点，也可以不是切点，而且这样的直线可能有多条．

典题导入

[例1]　用定义法求下列函数的导数．

(1)*y*＝*x*2；　(2)*y*＝.

[自主解答]　(1)因为＝

＝

＝＝2*x*＋Δ*x*，

所以*y*′＝ ＝ (2*x*＋Δ*x*)＝2*x*.

(2)因为Δ*y*＝－＝－，

＝－4·，

所以 ＝ ＝－.

由题悟法

根据导数的定义，求函数*y*＝*f*(*x*)在*x*＝*x*0处导数的步骤

(1)求函数值的增量Δ*y*＝*f*(*x*0＋Δ*x*)－*f*(*x*0)；

(2)求平均变化率＝；

(3)计算导数*f*′(*x*0)＝li .

以题试法

1．一质点运动的方程为*s*＝8－3*t*2.

(1)求质点在[1,1＋Δ*t*]这段时间内的平均速度；

(2)求质点在*t*＝1时的瞬时速度(用定义及导数公式两种方法求解)．

解：(1)∵*s*＝8－3*t*2，

∴Δ*s*＝8－3(1＋Δ*t*)2－(8－3×12)＝－6Δ*t*－3(Δ*t*)2，

＝＝－6－3Δ*t*.

(2)法一(定义法)：质点在*t*＝1时的瞬时速度

*v*＝li ＝li (－6－3Δ*t*)＝－6.

法二(导数公式法)：质点在*t*时刻的瞬时速度

*v*＝*s*′(*t*)＝(8－3*t*2)′＝－6*t*.

当*t*＝1时，*v*＝－6×1＝－6.

典题导入

[例2]　求下列函数的导数．

(1)*y*＝*x*2sin *x*；(2)*y*＝；

[自主解答]　(1)*y*′＝(*x*2)′sin *x*＋*x*2(sin *x*)′＝2*x*sin *x*＋*x*2cos *x*.

(2)*y*′＝

＝＝.

则*y*′＝(ln *u*)′*u*′＝·2＝，

即*y*′＝.

由题悟法

求导时应注意：

(1)求导之前利用代数或三角恒等变换对函数进行化简可减少运算量．

(2)对于商式的函数若在求导之前变形，则可以避免使用商的导数法则，减少失误．

以题试法

2．求下列函数的导数．

(1)*y*＝e*x*·ln *x*；(2)*y*＝*x*；

解：(1)*y*′＝(e*x*·ln *x*)′

＝e*x*ln *x*＋e*x*·＝e*x*.

(2)∵*y*＝*x*3＋1＋，∴*y*′＝3*x*2－.

典题导入

[例3]　(1)(2011·山东高考)曲线*y*＝*x*3＋11在点*P*(1，12)处的切线与*y*轴交点的纵坐标是(　　)

A．－9　　　　　　　　　 B．－3

C．9 D．15

(2)设函数*f*(*x*)＝*g*(*x*)＋*x*2，曲线*y*＝*g*(*x*)在点(1，*g*(1))处的切线方程为*y*＝2*x*＋1，则曲线*y*＝*f*(*x*)在点(1，*f*(1))处切线的斜率为(　　)

A．－ B．2

C．4 D．－

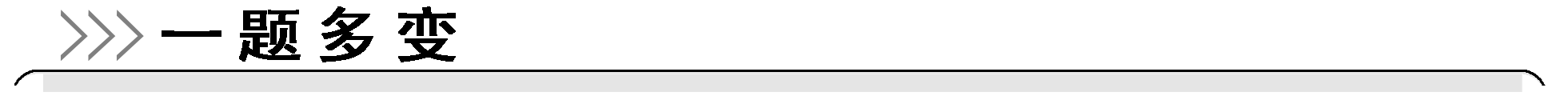
[自主解答]　(1)*y*′＝3*x*2，故曲线在点*P*(1,12)处的切线斜率是3，故切线方程是*y*－12＝3(*x*－1)，令*x*＝0得*y*＝9.

(2)∵曲线*y*＝*g*(*x*)在点(1，*g*(1))处的切线方程为*y*＝2*x*＋1，∴*g*′(1)＝*k*＝2.

又*f*′(*x*)＝*g*′(*x*)＋2*x*，

∴*f*′(1)＝*g*′(1)＋2＝4，故切线的斜率为4.

[答案]　(1)C　(2)C



若例3(1)变为：曲线*y*＝*x*3＋11，求过点*P*(0,13)且与曲线相切的直线方程．

解：因点*P*不在曲线上，设切点的坐标为(*x*0，*y*0)，

由*y*＝*x*3＋11，得*y*′＝3*x*2，

∴*k*＝*y*′|*x*＝*x*0＝3*x*.

又∵*k*＝，∴＝3*x*.

∴*x*＝－1，即*x*0＝－1.

∴*k*＝3，*y*0＝10.

∴所求切线方程为*y*－10＝3(*x*＋1)，

即3*x*－*y*＋13＝0.



由题悟法

导数的几何意义是切点处切线的斜率，应用时主要体现在以下几个方面：

(1)已知切点*A*(*x*0，*f*(*x*0))求斜率*k*，即求该点处的导数值：*k*＝*f*′(*x*0)；

(2)已知斜率*k*，求切点*A*(*x*1，*f*(*x*1))，即解方程*f*′(*x*1)＝*k*；

(3)已知切线过某点*M*(*x*1，*f*(*x*1))(不是切点)求切点，设出切点*A*(*x*0，*f*(*x*0))，利用*k*＝＝*f*′(*x*0)求解．

以题试法

3．(1)(2012·新课标全国卷)曲线*y*＝*x*(3ln *x*＋1)在点(1,1)处的切线方程为\_\_\_\_\_\_\_\_．

(2)(2013·乌鲁木齐诊断性测验)直线*y*＝*x*＋*b*与曲线*y*＝－*x*＋ln *x*相切，则*b*的值为(　　)

A．－2 B．－1

C．－ D．1

解析：(1)*y*′＝3ln *x*＋1＋3，所以曲线在点(1,1)处的切线斜率为4，所以切线方程为*y*－1＝4(*x*－1)，即*y*＝4*x*－3.

(2)设切点的坐标为，依题意，对于曲线*y*＝－*x*＋ln *x*，有*y*′＝－＋，所以－＋＝，得*a*＝1.又切点 在直线*y*＝*x*＋*b*上，故－＝＋*b*，得*b*＝－1.

答案：(1)*y*＝4*x*－3　(2)B



1．函数*f*(*x*)＝(*x*＋2*a*)(*x*－*a*)2的导数为(　　)

A．2(*x*2－*a*2)　　　　　　　 B．2(*x*2＋*a*2)

C．3(*x*2－*a*2) D．3(*x*2＋*a*2)

解析：选C　*f*′(*x*)＝(*x*－*a*)2＋(*x*＋2*a*)[2(*x*－*a*)]＝3(*x*2－*a*2)．

2．已知物体的运动方程为*s*＝*t*2＋(*t*是时间，*s*是位移)，则物体在时刻*t*＝2时的速度为(　　)

A. B.

C. D.

解析：选D　∵*s*′＝2*t*－，∴*s*′|*t*＝2＝4－＝.

3． (2012·哈尔滨模拟)已知*a*为实数，函数*f*(*x*)＝*x*3＋*ax*2＋(*a*－2)*x*的导函数*f*′(*x*)是偶函数，则曲线*y*＝*f*(*x*)在原点处的切线方程为(　　)

A．*y*＝－3*x* B．*y*＝－2*x*

C．*y*＝3*x* D．*y*＝2*x*

解析：选B　∵*f*(*x*)＝*x*3＋*ax*2＋(*a*－2)*x*，

∴*f*′(*x*)＝3*x*2＋2*ax*＋*a*－2.

∵*f*′(*x*)为偶函数，∴*a*＝0.

∴*f*′(*x*)＝3*x*2－2.∴*f*′(0)＝－2.

∴曲线*y*＝*f*(*x*)在原点处的切线方程为*y*＝－2*x*.

4．设曲线*y*＝在点处的切线与直线*x*－*ay*＋1＝0平行，则实数*a*等于(　　)

A．－1 B.

C．－2 D．2

解析：选A　∵*y*′＝＝，∴*y*′|*x*＝＝－1.由条件知＝－1，∴*a*＝－1.

5．若点*P*是曲线*y*＝*x*2－ln*x*上任意一点，则点*P*到直线*y*＝*x*－2的最小距离为(　　)

A．1 B.

C. D.

解析：选B　设*P*(*x*0，*y*0)到直线*y*＝*x*－2的距离最小，则*y*′|*x*＝*x*0＝2*x*0－＝1.

得*x*0＝1或*x*0＝－(舍)．

∴*P*点坐标(1,1)．

∴*P*到直线*y*＝*x*－2距离为*d*＝＝.

6．*f*(*x*)与*g*(*x*)是定义在R上的两个可导函数，若*f*(*x*)，*g*(*x*)满足*f*′(*x*)＝*g*′(*x*)，则*f*(*x*)与*g*(*x*)满足(　　)

A．*f*(*x*)＝*g*(*x*) B．*f*(*x*)＝*g*(*x*)＝0

C．*f*(*x*)－*g*(*x*)为常数函数 D．*f*(*x*)＋*g*(*x*)为常数函数

解析：选C　由*f*′(*x*)＝*g*′(*x*)，得*f*′(*x*)－*g*′(*x*)＝0，

即[*f*(*x*)－*g*(*x*)]′＝0，所以*f*(*x*)－*g*(*x*)＝*C*(*C*为常数)．

7．(2013·郑州模拟)已知函数*f*(*x*)＝ln *x*－*f*′(－1)*x*2＋3*x*－4，则*f*′(1)＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析：∵*f*′(*x*)＝－2*f*′(－1)*x*＋3，

*f*′(－1)＝－1＋2*f*′(－1)＋3，

∴*f*′(－1)＝－2，∴*f*′(1)＝1＋4＋3＝8.

答案：8

8．(2012·辽宁高考)已知*P*，*Q*为抛物线*x*2＝2*y*上两点，点*P*，*Q*的横坐标分别为4，－2，过*P*，*Q*分别作抛物线的切线，两切线交于点*A*，则点*A*的纵坐标为\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：易知抛物线*y*＝*x*2上的点*P*(4,8)，*Q*(－2,2)，且*y*′＝*x*，则过点*P*的切线方程为*y*＝4*x*－8，过点*Q*的切线方程为*y*＝－2*x*－2，联立两个方程解得交点*A*(1，－4)，所以点*A*的纵坐标是－4.

答案：－4

9．(2012·黑龙江哈尔滨二模)已知函数*f*(*x*)＝*x*－sin *x*－cos *x*的图象在点*A*(*x*0，*y*0)处的切线斜率为1，则tan *x*0＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析：由*f*(*x*)＝*x*－sin *x*－cos *x*得*f*′(*x*)＝－cos *x*＋sin *x*，

则*k*＝*f*′(*x*0)＝－cos *x*0＋sin *x*0＝1，

即sin *x*0－cos *x*0＝1，即sin＝1.

所以*x*0－＝2*k*π＋，*k*∈Z，解得*x*0＝2*k*π＋，*k*∈Z.

故tan *x*0＝tan＝tan＝－.

答案：－

10．求下列函数的导数．

(1)*y*＝*x*·tan *x*；

(2)*y*＝(*x*＋1)(*x*＋2)(*x*＋3)；

解：(1)*y*′＝(*x*·tan *x*)′＝*x*′tan *x*＋*x*(tan *x*)′

＝tan *x*＋*x*·′＝tan *x*＋*x*·

＝tan *x*＋.

(2)*y*′＝(*x*＋1)′(*x*＋2)(*x*＋3)＋(*x*＋1)[(*x*＋2)(*x*＋3)]′＝(*x*＋2)(*x*＋3)＋(*x*＋1)(*x*＋2)＋(*x*＋1)(*x*＋3)＝3*x*2＋12*x*＋11.

11．已知函数*f*(*x*)＝*x*－，*g*(*x*)＝*a*(2－ln *x*)(*a*>0)．若曲线*y*＝*f*(*x*)与曲线*y*＝*g*(*x*)在*x*＝1处的切线斜率相同，求*a*的值，并判断两条切线是否为同一条直线．

解：根据题意有

曲线*y*＝*f*(*x*)在*x*＝1处的切线斜率为*f*′(1)＝3，

曲线*y*＝*g*(*x*)在*x*＝1处的切线斜率为*g*′(1)＝－*a*.

所以*f*′(1)＝*g*′(1)，即*a*＝－3.

曲线*y*＝*f*(*x*)在*x*＝1处的切线方程为*y*－*f*(1)＝3(*x*－1)，

得：*y*＋1＝3(*x*－1)，即切线方程为3*x*－*y*－4＝0.

曲线*y*＝*g*(*x*)在*x*＝1处的切线方程为*y*－*g*(1)＝3(*x*－1)．

得*y*＋6＝3(*x*－1)，即切线方程为3*x*－*y*－9＝0，

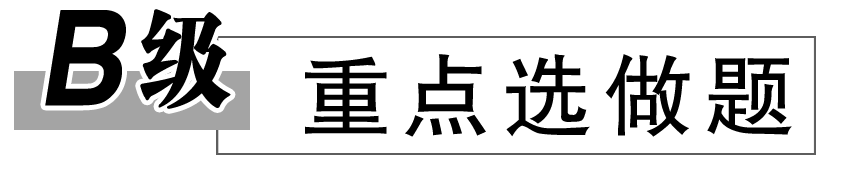
所以，两条切线不是同一条直线．

12．设函数*f*(*x*)＝*x*3＋*ax*2－9*x*－1，当曲线*y*＝*f*(*x*)斜率最小的切线与直线12*x*＋*y*＝6平行时，求*a*的值．

解：*f*′(*x*)＝3*x*2＋2*ax*－9＝32－9－，即当*x*＝－时，函数*f*′(*x*)取得最小值－9－，因斜率最小的切线与12*x*＋*y*＝6平行，

即该切线的斜率为－12，所以－9－＝－12，

即*a*2＝9，即*a*＝±3.



1．(2012·商丘二模)等比数列{*an*}中，*a*1＝2，*a*8＝4，*f*(*x*)＝*x*(*x*－*a*1)(*x*－*a*2)…(*x*－*a*8)，*f*′(*x*)为函数*f*(*x*)的导函数，则*f*′(0)＝(　　)

A．0 B．26

C．29 D．212

解析：选D　∵*f*(*x*)＝*x*(*x*－*a*1)(*x*－*a*2)…(*x*－*a*8)，

∴*f*′(*x*)＝*x*′(*x*－*a*1)…(*x*－*a*8)＋*x*[(*x*－*a*1)…(*x*－*a*8)]′

＝(*x*－*a*1)…(*x*－*a*8)＋*x*[(*x*－*a*1)…(*x*－*a*8)]′，

∴*f*′(0)＝(－*a*1)·(－*a*2)·…·(－*a*8)＋0＝*a*1·*a*2·…·*a*8＝(*a*1·*a*8)4＝(2×4)4＝(23)4＝212.

2．已知*f*1(*x*)＝sin *x*＋cos *x*，记*f*2(*x*)＝*f*1′(*x*)，*f*3(*x*)＝*f*2′(*x*)，…，*fn*(*x*)＝*fn*－1′(*x*)(*n*∈N\*，*n*≥2)，则*f*1＋*f*2＋…＋*f*2 012＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析：*f*2(*x*)＝*f*1′(*x*)＝cos *x*－sin *x*，

*f*3(*x*)＝(cos *x*－sin *x*)′＝－sin *x*－cos *x*，

*f*4(*x*)＝－cos *x*＋sin *x*，*f*5(*x*)＝sin *x*＋cos *x*，

以此类推，可得出*fn*(*x*)＝*fn*＋4(*x*)，

又∵*f*1(*x*)＋*f*2(*x*)＋*f*3(*x*)＋*f*4(*x*)＝0，

∴*f*1＋*f*2＋…＋*f*2 012＝503*f*1＋*f*2＋*f*3＋*f*4＝0.

答案：0

3．已知函数*f*(*x*)＝*x*3－3*x*及*y*＝*f*(*x*)上一点*P*(1，－2)，过点*P*作直线*l*，根据以下条件求*l*的方程．

(1)直线*l*和*y*＝*f*(*x*)相切且以*P*为切点；

(2)直线*l*和*y*＝*f*(*x*)相切且切点异于*P*.

解：(1)由*f*(*x*)＝*x*3－3*x*得*f*′(*x*)＝3*x*2－3，过点*P*且以*P*(1，－2)为切点的直线的斜率*f*′(1)＝0，

故所求的直线方程为*y*＝－2.

(2)设过*P*(1，－2)的直线*l*与*y*＝*f*(*x*)切于另一点(*x*0，*y*0)，则*f*′(*x*0)＝3*x*－3.

又直线过(*x*0，*y*0)，*P*(1，－2)，

故其斜率可表示为＝，

所以＝3*x*－3，

即*x*－3*x*0＋2＝3(*x*－1)(*x*0－1)．

解得*x*0＝1(舍去)或*x*0＝－，

故所求直线的斜率为*k*＝3＝－.

所以*l*的方程为*y*－(－2)＝－(*x*－1)，

即9*x*＋4*y*－1＝0.



设函数*f*(*x*)＝*ax*－，曲线*y*＝*f*(*x*)在点(2，*f*(2))处的切线方程为7*x*－4*y*－12＝0.

(1)求*f*(*x*)的解析式；

(2)证明：曲线*y*＝*f*(*x*)上任一点处的切线与直线*x*＝0和直线*y*＝*x*所围成的三角形面积为定值，并求此定值．

解：(1)方程7*x*－4*y*－12＝0可化为*y*＝*x*－3，当*x*＝2时，*y*＝.又*f*′(*x*)＝*a*＋，则解得故*f*(*x*)＝*x*－.

(2)证明：设*P*(*x*0，*y*0)为曲线上任一点，由*y*′＝1＋知曲线在点*P*(*x*0，*y*0)处的切线方程为*y*－*y*0＝·(*x*－*x*0)，即*y*－＝(*x*－*x*0)．

令*x*＝0得*y*＝－，从而得切线与直线*x*＝0的交点坐标为.

令*y*＝*x*得*y*＝*x*＝2*x*0，从而得切线与直线*y*＝*x*的交点坐标为(2*x*0,2*x*0)．

所以点*P*(*x*0，*y*0)处的切线与直线*x*＝0，*y*＝*x*所围成的三角形面积为|2*x*0|＝6.

故曲线*y*＝*f*(*x*)上任一点处的切线与直线*x*＝0，*y*＝*x*所围成的三角形的面积为定值，此定值为6.

【基础自测】

1. （2013全国高考）已知曲线在点处的切线的斜率为8，则=（ ）

A.9 B.6 C.-9 D.-6

2.（2014宁夏一模）如果过曲线上的点处的切线平行于直线，那么点的左标为 （ ）

A.（1,0） B.（0,-1） B.（0,1） D.（-1,0）

3.（2013惠州一模）设为曲线：上的点，且曲线在点处的切线倾斜角的取值范围为，则点横坐标的取值范围为 （ ）

A. B. C. D.

4.（2013宁夏联考）已知二次函数的导数为，且，对于任意实数都有，则的最小值为 （ ）

A.3 B. C.2 D.





