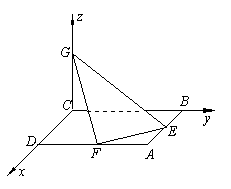
**立体几何中的向量方法难题-高中数学选修2-1第三章**

**空间距离**

利用向量方法求解空间距离问题，可以回避此类问题中大量的作图、证明等步骤，而转化为向量间的计算问题．

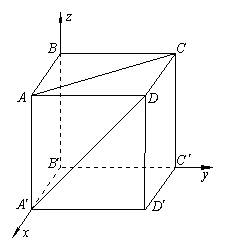
例１如图，已知正方形*ABCD*的边长为4，*E*、*F*分别是*AB*、*AD*的中点，*GC*⊥平面*ABCD*，且*GC*＝2，求点*B*到平面*EFG*的距离．

分析：由题设可知*CG*、*CB*、*CD*两两互相垂直，可以由此建立空间直角坐标系．用向量法求解，就是求出过*B*且垂直于平面*EFG*的向量，它的长即为点*B*到平面*EFG*的距离．

解：如图，设4***i***，4***j***，2***k***，以***i***、***j***、***k***为坐标向量建立空间直角坐标系*C*－*xyz*．

由题设C(0,0,0)，A(4,4,0)，B(0,4,0)，D(4,0,0)，E(2,4,0)，F(4,2,0)， G(0,0,2)．

故点*B*到平面*EFG*的距离为．

说明：用向量法求点到平面的距离，常常不必作出垂线段，只需利用垂足在平面内、共面向量定理、两个向量垂直的充要条件解出垂线段对应的向量就可以了．

例2已知正方体*ABCD*－的棱长为1，求直线与*AC*的距离．

分析：设异面直线、*AC*的公垂线是直线*l*，则线段在直线*l*上的射影就是两异面直线的公垂线段，所以此题可以利用向量的数量积的几何意义求解．

解：如图，设***i***，***j***，***k***，以***i***、***j***、***k***为坐标向量建立空间直角坐标系－*xyz*，则有

直线与*AC*的距离为．

# 向量的内积与二面角的计算

在《高等代数与解析几何》课程第一章向量代数的教学中，讲到几何空间的内积时，有一个例题要求证明如下的公式：

 (1)

其中点*O*是二面角*P-MN-Q*的棱*MN*上的点，*OA*、*OB*分别在平面*P*和平面*Q*内。，， 。为二面角*P-MN-Q*（见图1）。

TU01

图1

公式（1）可以利用向量的内积来加以证明：

以*Q*为坐标平面，直线*MN*为*y*轴，如图1建立直角坐标系。 记*xOz*平面与平面*P*的交线为射线*OD*，则，得

，，。

分别沿射线*OA*、*OB*的方向上作单位向量，，则。

由计算知，的坐标分别为

，，

于是，

。公式（1）在立体几何计算二面角的平面角时是有用的。我们来介绍如下的两个应用。

**例1．**立方体*ABCD-A­1B­­1C1D1*的边长为1，*E*、*F*、*G*、*H*、*I*分别为*A1D1*、*A1A*、*A1B1*、*B1C1*、*B1B*的中点。

求面*EFG*和面*GHI*的夹角的大小（用反三角函数表示）。

**解** 由于图2中所画的两平面*EFG*和*GHI*只有一个公共点，没有交线，所以我们可以将该立方体沿*AB*方向平移1个单位。这样就使平面*EFG*平移至平面。而就是二面角*G-IH-*（见图3）。利用公式（1），只要知道了，和的大小，我们就能求出。

TU02

图2

由已知条件，和均为等边三角形，所以，而。因此，

TU03

图3

，

即。

解得， 。

当然，在建立了直角坐标系之后，通过计算向量的外积可计算出两平面的法向量，利用法向量同样也可算出夹角来。

**例2．**计算正十二面体的两个相邻面的夹角的大小。

**解** 我们知道正十二面体的每个面都是大小相同的正五边形，且在正十二面体的每个顶点上均有3个面围绕。设*P*和*Q*是两个相邻的面，*MN*是它们的交线（如图4），则公式（1）中的，，分别为：

， ， ，

因此它们均为正五边形的内角。所以

。

TU04

图4

所以，由公式（1）知

，或

。

因此，，或。

如果不使用公式（1），要求出例2中的夹角的大小在计算上要复杂很多。

利用例2的结果，我们可以容易地计算出单位棱长正十二面体的体积*V*。

设单位棱长正十二面体的中心为*O*，则该十二面体可以切割成十二个全等的正五棱锥，每个五棱锥以该多面体的一个面为底面、以*O*为其顶点。设该正五棱锥为，从而可知：

。

再设的底面积为*S*、高为*h*，设为单位边长正五边形（即的底）的中心，*A*、*B*为该五边形的两个相邻的顶点，*H*为*AB*的中点，，则

， ， 。

仍设为正十二面体两相邻面的夹角，则。所以

。但是，，

从而

，

或