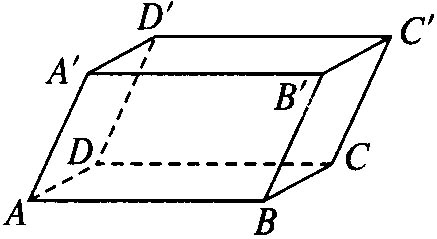
**空间向量及其运算难题-高中数学选修2-1第三章**

**类型一：空间向量的线性运算**

例1、已知在平行六面体中，设，，，试用向量、、来表示向量、。



**思路点拨:**要想用、、表示所给向量，只需结合图形，充分运用空间向量加法运算即可。

**解析：**在平行六面体中，四边形ABCD是平行四边形，

。

又因为四边形为平行四边形，

∴。

**总结升华：**运用已知向量表示其他向量时，应充分运用向量加法、减法的三角形法则，平行四边形法则以及向量加法的交换律、结合律等，运用数形结合的数学思想解题。

**举一反三：**

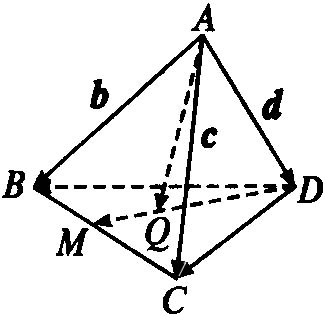
【变式1】在正方体ABCD—A1B1C1D1中，下列各式中运算的结果为向量的共有（ ）

① ② ③ ④

A．1个 B．2个 C．3个 D．4个

**【答案】**D

【变式2】如图，设四面体ABCD的三条棱，，，Q为△BCD的重心，M为BC的中点，试用、、表示向量、。

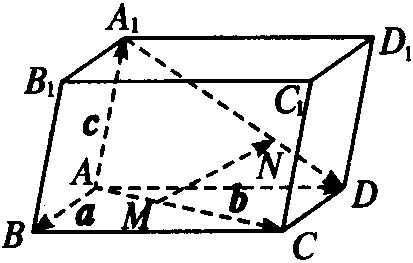


**【答案】**∵M为BC的中点，

∴

。

【变式3】如图，平行六面体A1B1C1D1—ABCD，M分成的比为，N分成的比为2，设，，，试用、、表示。



**【答案】**如图，连结AN，则。

∵ABCD是平行四边形，

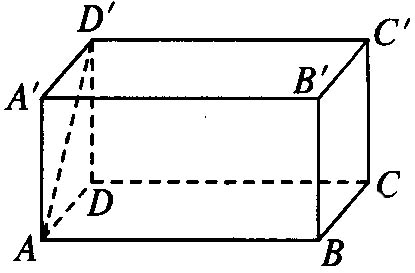
∴，

。

又∵N分成的比为2，

∴。

∴。

例2、如图，已知长方体，化简下列向量表达式：

（1）；

（2）。

**思路点拨:**化简向量时，一般先用平行四边形得到相等的向量或相反向量，再将它们转化为具有同一起点的向量，最后利用三角形法则或平行四边形法则化简。

**解析：**

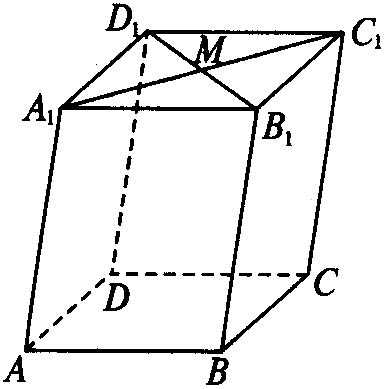
（1）；

（2）。

**总结升华：**化简向量表达式主要是利用平行四边形法则或三角形法则，遇到减法时既可转化为加法，也可按减法法则进行运算，加、减之间可以相互转化。表达式中各向量系数相等时，根据数乘分配律，可以把相同的系数提到括号外面。

**举一反三：**

【变式1】如图，已知平行六面体ABCD—A1B1C1D1，M为A1C1与B1D1的交点，化简下列向量表达式：

（1）；

（2）；

（3）；

（4）。

**【答案】**向量的加法利用平行四边形法则或三角形法则，封闭图形，首尾连接的向量的和为**0**。

（1）；

（2）；

（3）；

（4）。

【变式2】已知空间四边形ABCD，连接AC、BD，设M、G分别是BC、CD的中点，则等于（ ）

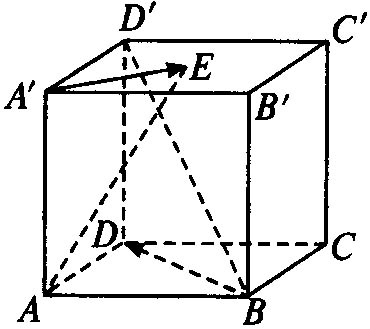
A． B． C． D．

**【答案】**B；





例3、已知正方体，点E是上底面的中心，求下列各式中x、y、z的值：



（1）；

（2）。

**思路点拨：**根据向量运算法则，用向量、、表示和，然后利用向量相等来确定x、y、z的值。

**解析：**

（1）∵，

又∵，

∴x=1，y=－1，z=1。

（2）∵

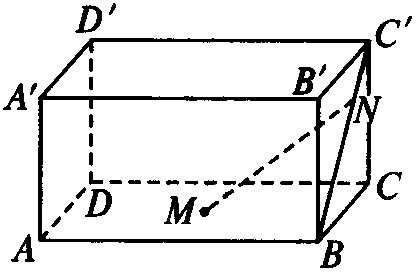
，

又∵，

∴，，。

**举一反三：**

【变式】已知是平行六面体。

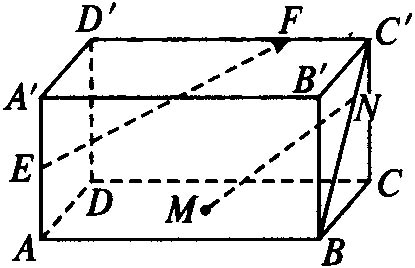


（1）化简，并在图中标出其结果；

（2）设M是底面ABCD的中心、N是侧面对角线上的分点，设，试求、、的值。

**【答案】**

（1）如图所示



取的中点为E，则

取F为的一个三等分点，则

又，，

∴。

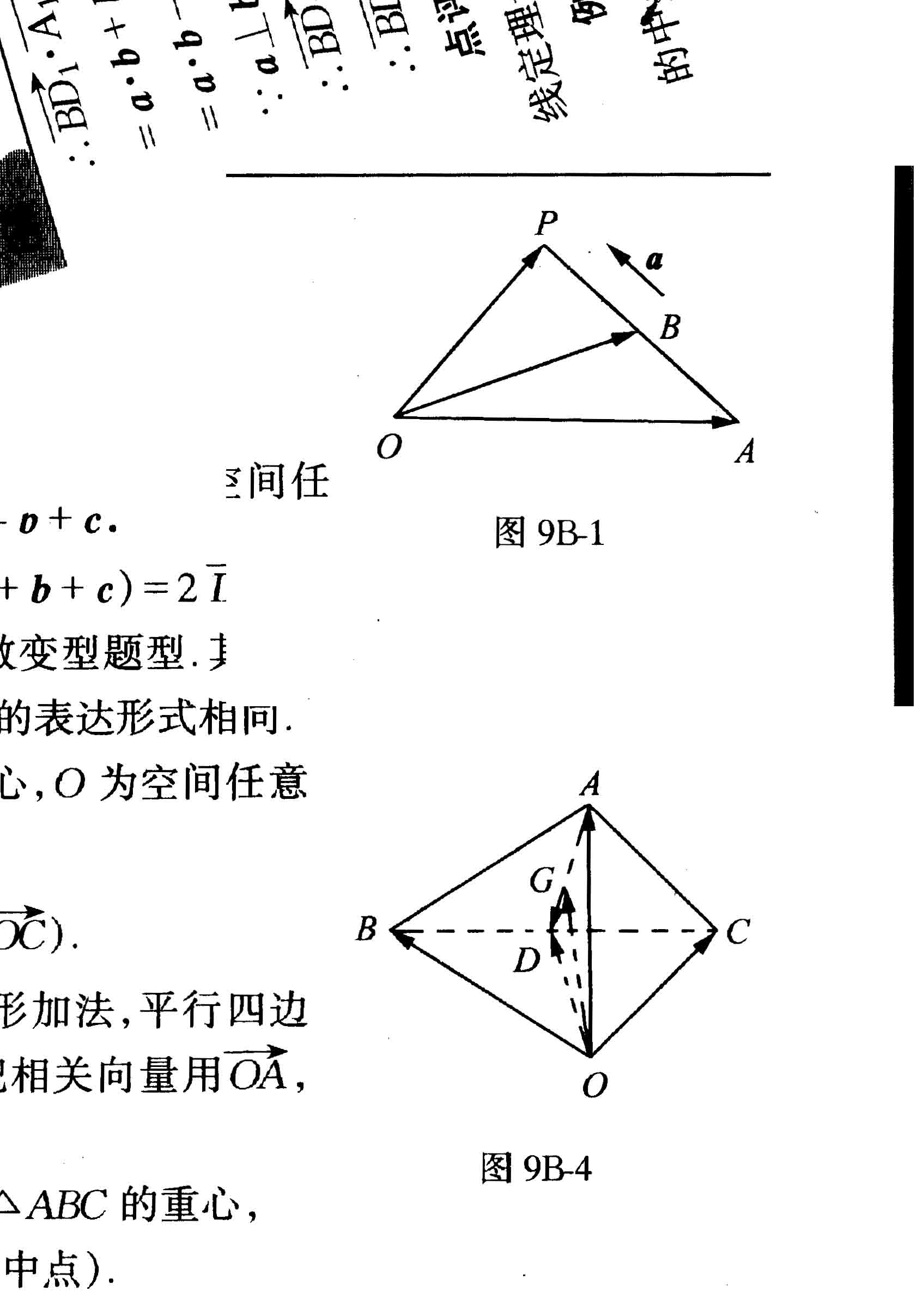
（表示法不唯一）

（2）



∴，，。

**例4．**若三棱锥O一ABC中G是ΔABC的重心，求证：.



**思路点拨：**先在ΔOBC中考虑中线OD,然后在ΔOAD中考虑G为AD的分点,分成的比是2：1,两次使用向量的运算性质,把相关向量用表示即可.

**证明：**如图所示，∵G是ΔABC的重心

∴，D为BC的中点

∴



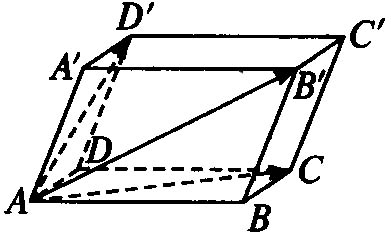
**总结升华：**

(1)灵活应用向量的运算法则是解此类题目的关键；

(2)此类例题常用到结论：若OD是ΔOBC的中线，则有

**举一反三：**

【变式1】在如图所示的平行六面体中，求证：。



**证明：**∵平行六面体的六个面均为平行四边形，

∴，，，

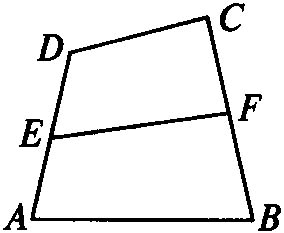
∴

又由于，，

∴

∴。

【变式2】如图，在四边形ABCD中，E、F分别为AD、BC的中点，试证：。



**证明：** ①

 ②

①+②得。

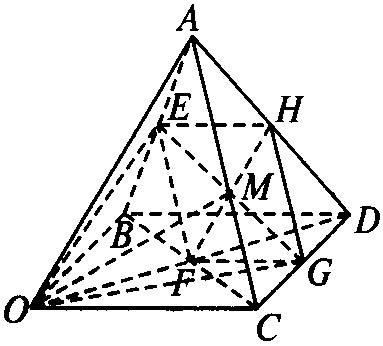
∴。

**类型二：共线向量定理的应用**

例5、已知E、F、G、H分别是空间四边形ABCD的边AB、BC、CD、DA的中点。

（1）用向量法证明BD∥平面EFGH；

（2）设M是EG和FH的交点，求证：对空间任意一点O，有。



**思路点拨：**为了证明BD∥平面EFGH，只需要证明与平面EFGH内的一个向量共线即可。要证第（2）问，应充分利用共线向量定理和向量的平行四边形法则和三角形法则。

**证明：**

（1）∵



∴EH∥BD

又EH平面EFGH，BD平面EFGH，

∴BD∥平面EFGH。

（2）连结OM、OA、OB、OC、OD、OE、OG，

由（1）知，同理可证，

∴，∴

∴EG、FH交于一点M，且被M平分。

∴





即。

**总结升华：**用共线向量定理和向量的运算法及向量知识判定三点共线、直线和直线平行，直线和平面平行，平面和平面平行等，丰富了解题思路、方法，开阔了视野。

**举一反三：**

【变式1】设、是平面上不共线的向量，已知，，，若A、B、D三点共线，求k的值。

**解析：**由共线的向量定理列出关系式。

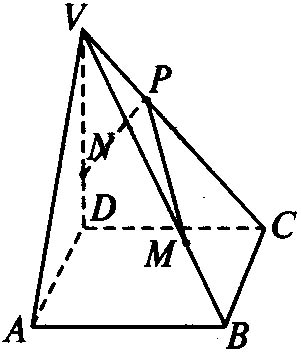
∵，。

又∵A、B、D三点共线，

由共线向量定理，得，∴。

【变式2】V为矩形ABCD所在平面外一点，且VA=VB=VC=VD，，，。

求证：VA∥平面PMN。

**证明：**设，，，

则。

由题意，知，

。

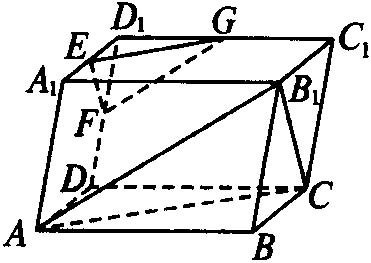
∴。

∴∥平面PMN。

又∵VA平面PMN，∴VA∥平面PMN。

【变式3】如图，在平行六面体ABCD—A1B1C1D1中，E、F、G分别是A1D1、D1D、D1C1的中点。

求证：平面EFG∥平面AB1C。



**解析：**用共线向量定理证明线线平行，从而证明面面平行。

**证明：**设，，，

则，

∴，

∴，∴EG∥AC

又∵，

∴

∴，EF∥B1C。

又∵EG与EF相交，AC与B1C相交，

∴平面EFG∥平面AB1C。

**类型三：空间向量的数量积的计算**

例6、已知，，，求的值。

**解析：**

。

∴。

**举一反三：**

【变式1】已知向量、、两两之间的夹角都为60°，其模都为1，则等于（ ）

A． B．5 C．6 D．

**【答案】**A





∴。

【变式2】设，，，且，，，则向量的模是\_\_\_\_\_\_\_\_。

**【答案】**

∵



，

∴。

【变式3】已知：, ，试计算。

**【答案】**由,

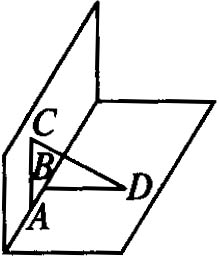
可得

∵，

∴。

**类型四：利用空间向量的数量积求线段的长度**

例7、在直二面角的棱上有两点A、B，AC和BD各在这个二面角的一个面内，并且都垂直于棱AB，设AB=8cm，AC=6cm，BD=24cm，求CD的长。



**思路点拨：**不难发现ABCD为一空间四边形，由空间向量的加法运算法则，有，于是CD之长可求。

**解析：**如图，依题有、、两两垂直，

∴，，。

∴

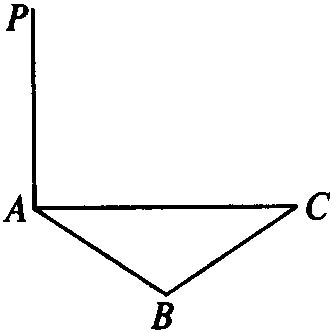
。

∴。

**总结升华：**空间向量求模的运算要注意公式的准确应用。向量的模就是表示向量的有向线段的长度，因此求线段长度的总是可用向量求解。

**举一反三：**

【变式1】已知PA⊥平面ABC，∠ABC=120°，PA=AB=BC=6，求线段PC的长，

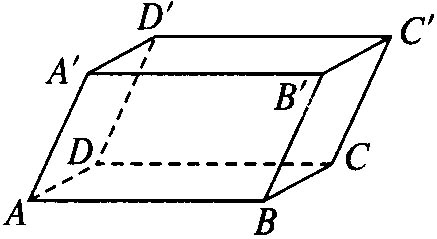


**【答案】**∵，

∴。

∴|PC|=12。

【变式2】已知在平行六面体中，AB=4，AD=3，AA＇=5，∠BAD=90°，∠BAA＇=∠DAA＇=60°，则AC＇等于（ ）



A．85 B． C． D．50

**【答案】**B





=50+2(10+7.5)=85。

**类型五：利用空间向量的数量积求异面直线所成的角**

例8、正四面体S—ABC中，E、F分别为SA和BC的中点，求异面直线BE和SF所成角。

A

B

C

S

E

F

**思路点拨：**本题用传统立体几何方法求异面直线BE和SF所成角，可以利用中位线平移或补形在正方体中计算，但是图形添加辅助线后不易观察，计算量也稍大。如用向量夹角公式求解，无须添加辅助线，便于观察图形，更能有效地解决问题。

**解析：**设该正四面体棱长为2

∵









又∵

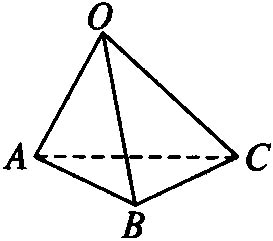
∴

∴异面直线BE和SF所成角大小为。

**总结升华：**用向量夹角公式解决异面直线所成角的问题时，应注意角的范围，向量夹角范围是[0°，180°]，异面直线所成的角的范围是（0°，90°]，当用夹角公式求出的角为钝角时，它的补角才等于异面直线所成的角。

**举一反三：**

【变式1】如图所示，在空间四边形OABC中，OA=8，AB=6，AC=4，BC=5，∠OAC=45°，∠OAB=60°，求异面直线OA与BC所成角的余弦值。



**【答案】**

∵，∴

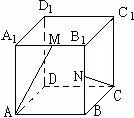




∴。

∴OA与BC的夹角的余弦值为。

【变式2】如图，在棱长为1的正方体中，M、N分别是和的中点，那么直线AM与CN所成的角的余弦值是（ ）



A.　　 B.　　 C.　 　D.

**【答案】**C；

设，，，

则，，

∵，，

∴，，

∴==

∴直线AM与CN所成的角的余弦值是.

【变式3】正四棱锥中，，分别是的中点，求所成角的余弦值。



**【答案】**设，，，

则，,，

，

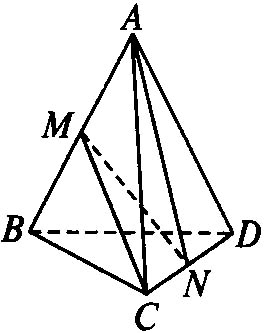
∴,



故所成角的余弦值.

**类型六：空间向量的数量积在立体几何中的应用**

例9、如图，已知空间四边形ABCD的每条边和对角线的长都等于a，点M、N分别是边AB、CD的中点。



（1）求证：MN为AB和CD的公垂线；

（2）求MN的长；

（3）求异面直线AN与MC所成角的余弦值。

**解析：**如图，设，，。

由题意，可知，且、、三向量两两夹角均为60°。

（1）**证明：**，

∴



∴MN⊥AB，同理可证MN⊥CD。

∴MN为AB与CD的公垂线。

（2）由（1）可知，

∴

。

∴,∴MN的长度为。

（3）设向量与的夹角为，

∵，，

∴





。

又∵，

∴。

∴。

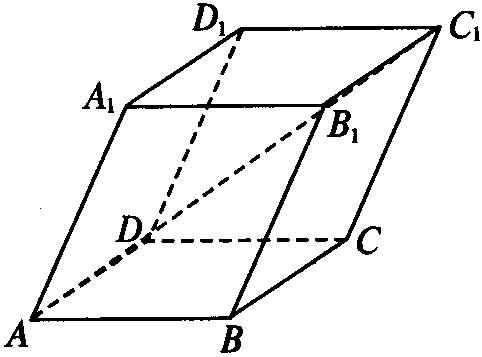
∴向量与的夹角余弦值为。

从而异面直线AN、MC所成角的余弦值为。

**总结升华：**空间向量求模的运算要注意公式的准确应用。向量的模就是表示向量的有向线段的长度，因此求线段长度的总是可用向量求解。立体几何中有关判断线线垂直、异面直线所成角的大小问题，通常可以转化为求向量的数量积和求向量的夹角而得到。

**举一反三：**

【变式】如图，平行六面体ABCD—A1B1C1D1中，以顶点A为端点的三条棱长都为1，且两两夹角为60°。



（1）求AC1的长；

（2）求AC1与面ABCD所成的角。

**解析：**记，，，

于是，。

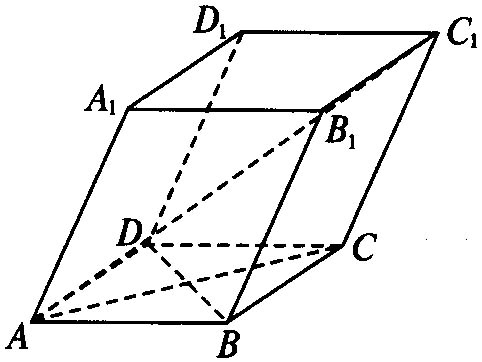
（1），

∴

。

∴，即AC1的长为。

（2）连结AC、BD



由四边形ABCD是菱形，知BD⊥AC。

又，。

∴BD⊥CC1

∴BD⊥平面ACC1，∴ABCD⊥平面ACC1。

故AC是AC1在平面ABCD内的射影，∠C1AC即为AC1与面ABCD所成的角。

∵，，

∴

。

故AC1与平面ABCD所成的角为。