**全称量词与存在量词知识点总结-高中数学选修2-1第一章**

1. **知识回顾**

(1)全称量词有：所有的，任意一个，任给，用符号“∀”表示；存在量词有：存在一个，至少有一个，有些，用符号“∃”表示．

(2)含有全称量词的命题，叫做全称命题．“对*M*中任意一个*x*，有*p*(*x*)成立”用符号简记为：∀*x*∈*M*，*p*(*x*)．

(3)含有存在量词的命题，叫做特称命题．“存在*M*中元素*x*0，使*p*(*x*0)成立”用符号简记为：∃*x*0∈*M*，*p*(*x*0)．

**二、例题辨析 推陈出新**

例1已知命题*p*：(*a*－2)2＋|*b*－3|≥0(*a*，*b*∈**R**)，命题*q*：*x*2－3*x*＋2<0的解集是{*x*|1<*x*<2}，给出下列结论：

①命题“*p*∧*q*”是真命题；

②命题“*p*∧非*q*”是假命题；

③命题“非*p*∨*q*”是真命题；

④命题“非*p*∨非*q*”是假命题．其中正确的是(　　)

A．②③　　　　　　　　　 B．①②④

C．①③④ D．①②③④

[自主解答]　命题*p*：(*a*－2)2＋|*b*－3|≥0(*a*，*b*∈**R**)是真命题，命题*q*：*x*2－3*x*＋2<0的解集是{*x*|1<*x*<2}也是真命题，故①命题“*p*∧*q*”是真命题；②命题“*p*∧非*q*”是假命题；③命题“非*p*∨*q*”是真命题；④命题“非*p*∨非*q*”是假命题．

[答案]　D

变式练习1．(2013·长春名校联考)命题*p*：若***a***·***b***>0，则***a***与***b***的夹角为锐角；命题*q*：若函数*f*(*x*)在(－∞，0]及(0，＋∞)上都是减函数，则*f*(*x*)在(－∞，＋∞)上是减函数．下列说法中正确的是(　　)

A．“*p*或*q*”是真命题　　　　 B．“*p*或*q*”是假命题

C．非*p*为假命题 D．非*q*为假命题

解析：选B　∵当***a***·***b***>0时，***a***与***b***的夹角为锐角或零度角，∴命题*p*是假命题；命题*q*是假命题，例如*f*(*x*)＝综上可知，“*p*或*q*”是假命题.

例2(1)下列命题中，真命题是(　　)

A．∃*x*0∈，sin *x*0＋cos *x*0≥2

B．∀*x*∈(3，＋∞)，*x*2>2*x*＋1

C．∃*x*0∈**R**，*x*＋*x*0＝－1

D．∀*x*∈，tan *x*>sin *x*

(2)已知*a*>0，函数*f*(*x*)＝*ax*2＋*bx*＋*c*，若*m*满足关于*x*的方程2*ax*＋*b*＝0，则下列选项中的命题为假命题的是(　　)

A．∃*x*0∈**R**，*f*(*x*0)≤*f*(*m*)

B．∃*x*0∈**R**，*f*(*x*0)≥*f*(*m*)

C．∀*x*∈**R**，*f*(*x*)≤*f*(*m*)

D．∀*x*∈**R**，*f*(*x*)≥*f*(*m*)

[自主解答]　(1)对于选项A，sin *x*＋cos *x*＝sin≤ ，∴此命题不成立；对于选项B，*x*2－2*x*－1＝(*x*－1)2－2，当*x*>3时，(*x*－1)2－2>0，∴此命题成立；对于选项C，*x*2＋*x*＋1＝2＋>0，∴*x*2＋*x*＝－1对任意实数*x*都不成立，∴此命题不成立；对于选项D，当*x*∈时，tan *x*<0，sin *x*>0，命题显然不成立．

(2)∵*a*>0，∴函数*f*(*x*)＝*ax*2＋*bx*＋*c*在*x*＝－处取得最小值．

∴*f*(*m*)是函数*f*(*x*)的最小值．故C错误．

[答案]　(1)B　(2)C

变式练习2．下列命题中是假命题的是(　　)

A．存在*α*，*β*∈**R**，使tan(*α*＋*β*)＝tan *α*＋tan *β*

B．对任意*x*>0，有lg2*x*＋lg *x*＋1>0

C．△*ABC*中，*A*>*B*的充要条件是sin *A*>sin *B*

D．对任意*φ*∈**R**，函数*y*＝sin(2*x*＋*φ*)都不是偶函数

解析：选D　对于A，当*α*＝*β*＝0时，tan(*α*＋*β*)＝0＝tan *α*＋tan *β*，因此选项A是真命题；对于B，注意到lg2*x*＋lg *x*＋1＝2＋≥>0，因此选项B是真命题；对于C，在△*ABC*中，*A*>*B*⇔*a*>*b*⇔2*R*sin *A*>2*R*sin *B*⇔sin *A*>sin *B*(其中*R*是△*ABC*的外接圆半径)，因此选项C是真命题；对于D，注意到当*φ*＝时，*y*＝sin(2*x*＋*φ*)＝cos 2*x*是偶函数，因此选项D是假命题.

例3写出下列命题的否定，并判断其真假．

(1)*p*：∀*x*∈**R**，*x*2－*x*＋≥0；

(2)*q*：所有的正方形都是矩形；

(3)*r*：∃*x*0∈**R**，*x*＋2*x*0＋2≤0；

(4)*s*：至少有一个实数*x*0，使*x*＋1＝0.

[自主解答]　(1)非*p*：∃*x*0∈**R**，*x*－*x*0＋<0，假命题．

(2)非*q*：至少存在一个正方形不是矩形，假命题．

(3)非*r*：∀*x*∈**R**，*x*2＋2*x*＋2>0，真命题．

(4)非*s*：∀*x*∈**R**，*x*3＋1≠0，假命题．

变式练习3．命题“能被5整除的数，末位是0”的否定是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：省略了全称量词“任何一个”，否定为：有些可以被5整除的数，末位不是0.

答案：有些可以被5整除的数，末位不是0

例4已知命题*p*：关于*x*的方程*x*2－*ax*＋4＝0有实根；命题*q*：关于*x*的函数*y*＝2*x*2＋*ax*＋4在[3，＋∞)上是增函数．若*p*或*q*是真命题，*p*且*q*是假命题，则实数*a*的取值范围是(　　)

A．(－12，－4]∪[4，＋∞)

B．[－12，－4]∪[4，＋∞)

C．(－∞，－12)∪(－4,4)

D．[－12，＋∞)

[自主解答]　命题*p*等价于*Δ*＝*a*2－16≥0，即*a*≤－4或*a*≥4；命题*q*等价于－≤3，即*a*≥－12.由*p*或*q*是真命题，*p*且*q*是假命题知，命题*p*和*q*一真一假．若*p*真*q*假，则*a*<－12；若*p*假*q*真，则－4<*a*<4.故*a*的取值范围是(－∞，－12)∪(－4,4)．

[答案]　C

4．已知*c*>0，且*c*≠1，设*p*：函数*y*＝*cx*在**R**上单调递减；*q*：函数*f*(*x*)＝*x*2－2*cx*＋1在上为增函数，若“*p*且*q*”为假，“*p*或*q*”为真，求实数*c*的取值范围．

解：∵函数*y*＝*cx*在**R**上单调递减，∴0<*c*<1.

即*p*：0<*c*<1，∵*c*>0且*c*≠1，∴非*p*：*c*>1.

又∵*f*(*x*)＝*x*2－2*cx*＋1在上为增函数，∴*c*≤.即*q*：0<*c*≤，∵*c*>0且*c*≠1，

∴非*q*：*c*>且*c*≠1.

又∵“*p*或*q*”为真，“*p*且*q*”为假，

∴*p*真*q*假或*p*假*q*真．

①当*p*真，*q*假时，{*c*|0<*c*<1}∩＝.

②当*p*假，*q*真时，{*c*|*c*>1}∩＝∅.

综上所述，实数*c*的取值范围是.

1. **归纳总结 方法在握**

归纳

1个规律——含逻辑联结词的命题的真假判断规律

(1)*p*∨*q*：*p*、*q*中有一个为真，则*p*∨*q*为真，即一真全真；

(2)*p*∧*q*：*p*、*q*中有一个为假，则*p*∧*q*为假，即一假即假；

(3)非*p*：与*p*的真假相反，即一真一假，真假相反．

2种方法——含量词的命题的否定及真假判断方法

(1)全称命题真假的判断方法(见例2)；

(2)特称命题真假的判断方法(见例2)；

(3)含量词的命题的否定方法是“改量词，否结论”，即把全称量词与存在量词互换，然后否定原命题的结论．

2个易错点——命题否定中的两个易错点

(1)对于省略量词的命题，应先挖掘命题中隐含的量词，改写成含量词的完整形式，再写出命题的否定．

(2)*p*或*q*的否定为：非*p*且非*q*；*p*且*q*的否定为：非*p*或非*q*.

3．常见词语的否定形式

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 正面词语 | 是 | 都是 | > | 至少有一个 | 至多有一个 | 对任意*x*∈*A*使*p*(*x*)真 |
| 否定词语 | 不是 | 不都是 | ≤ | 一个也没有 | 至少有两个 | 存在*x*0∈*A*，使*p*(*x*0)假 |

1. **拓展延伸 能力升华**

例1、(2012·辽宁高考)已知命题*p*：∀*x*1，*x*2∈**R**，(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)≥0，则非*p*是(　　)

A．∃*x*1，*x*2∈**R**，(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)≤0

B．∀*x*1，*x*2∈**R**，(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)≤0

C．∃*x*1，*x*2∈**R**，(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)<0

D．∀*x*1，*x*2∈**R**，(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)<0

[解析]　题目中命题的意思是“对任意的*x*1，*x*2∈**R**，(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)≥0都成立”，要否定它，只要找到至少一组*x*1，*x*2，使得(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)<0即可，故命题“∀*x*1，*x*2∈**R**，(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)≥0”的否定是“∃*x*1，*x*2∈**R**，(*f*(*x*2)－*f*(*x*1))(*x*2－*x*1)<0”．

[答案]　C

变式练习

1．命题“∃*x*0∈**R**，*x*－2*x*0＋1<0”的否定是(　　)

A．∃*x*0∈**R**，*x*－2*x*0＋1≥0

B．∃*x*0∈**R**，*x*－2*x*0＋1>0

C．∀*x*∈**R**，*x*2－2*x*＋1≥0

D．∀*x*∈**R**，*x*2－2*x*＋1<0

解析：选C　因为特称命题*p*：∃*x*0∈*A*，*P*(*x*0)，它的否定是非*p*：∀*x*∈*A*，非*P*(*x*)，所以命题“∃*x*0∈**R**，*x*－2*x*0＋1<0”的否定是“∀*x*∈**R**，*x*2－2*x*＋1≥0”．

2．若命题*p*：∀*x*∈，tan *x*>sin *x*，则命题非*p*：(　　)

A．∃*x*0∈，tan *x*0≥sin *x*0

B．∃*x*0∈，tan *x*0>sin *x*0

C．∃*x*0∈，tan *x*0≤sin *x*0

D．∃*x*0∈∪，tan *x*0>sin *x*0

解析：选C　∀*x*的否定为∃*x*0，>的否定为≤，所以命题非*p*为∃*x*0∈，tan *x*0≤sin *x*0.

1. **课后作业 巩固提高**

一、选择题(本大题共6小题，每小题5分，共30分)

1．(2013·长沙模拟)设*p*、*q*是两个命题，则“复合命题*p*或*q*为真，*p*且*q*为假”的充要条件是(　　)

A．*p*、*q*中至少有一个为真　　 B．*p*、*q*中至少有一个为假

C．*p*、*q*中有且只有一个为真 D．*p*为真，*q*为假

解析：选C　∵*p*或*q*为真⇒*p*、*q*中至少有一个为真；*p*且*q*为假⇒*p*、*q*中至少有一个为假，

∴“命题*p*或*q*为真，*p*且*q*为假”⇒*p*与*q*一真一假．

而由C选项⇒“命题*p*或*q*为真，*p*且*q*为假”．

2．下列四个命题中的真命题为(　　)

A．∃*x*0∈**Z,**1<4*x*0<3 B．∃*x*0∈**Z,**5*x*0＋1＝0

C．∀*x*∈**R**，*x*2－1＝0 D．∀*x*∈**R**，*x*2＋*x*＋2>0

解析：选D　1<4*x*0<3，<*x*0<，这样的整数*x*0不存在，故A错误；5*x*0＋1＝0，*x*0＝－∉**Z**，故B错误；*x*2－1＝0，*x*＝±1，故C错误；对任意实数*x*，都有*x*2＋*x*＋2＝2＋>0.

3．(2013·揭阳模拟)已知命题*p*：∃*x*0∈**R**，cos *x*0＝；命题*q*：∀*x*∈**R**，*x*2－*x*＋1>0，则下列结论正确的是(　　)

A．命题*p*∧*q*是真命题

B．命题*p*∧非*q*是真命题

C．命题非*p*∧*q*是真命题

D．命题非*p*∨非*q*是假命题

解析：选C　命题*p*是假命题，命题*q*是真命题，

∴*p*∧*q*是假命题，*p*∧非*q*是假命题，

非*p*∧*q*是真命题，非*q*∨非*p*是真命题．

4．已知命题*p*：∃*x*0∈，sin *x*0＝，则非*p*为(　　)

A．∀*x*∈，sin *x*＝

B．∀*x*∈，sin *x*≠

C．∃*x*0∈，sin *x*0≠

D．∃*x*0∈，sin *x*0>

解析：选B　依题意得，命题非*p*应为：∀*x*∈，sin *x*≠.

5．已知命题*p*：抛物线*y*＝2*x*2的准线方程为*y*＝－；命题*q*：若函数*f*(*x*＋1)为偶函数，则*f*(*x*)关于*x*＝1对称．则下列命题是真命题的是(　　)

A．*p*∧*q* B．*p*∨(非*q*)

C．(非*p*)∧(非*q*) D．*p*∨*q*

解析：选D　抛物线*y*＝2*x*2，即*x*2＝*y*的准线方程是*y*＝－；当函数*f*(*x*＋1)为偶函数时，函数*f*(*x*＋1)的图象关于直线*x*＝0对称，函数*f*(*x*)的图象关于直线*x*＝1对称(注：将函数*f*(*x*)的图象向左平移一个单位长度可得到函数*f*(*x*＋1)的图象)，因此命题*p*是假命题，*q*是真命题，*p*∧*q*、*p*∨(非*q*)、(非*p*)∧(非*q*)都是假命题，*p*∨*q*是真命题．

6．(2013·南昌模拟)下列命题正确的是(　　)

A．已知*p*：>0，则非*p*：≤0

B．在△*ABC*中，角*A*、*B*、*C*的对边分别是*a*、*b*、*c*，则*a*>*b*是cos *A*<cos *B*的充要条件

C．命题*p*：对任意的*x*∈**R**，*x*2＋*x*＋1>0，则非*p*：对任意的*x*∈**R**，*x*2＋*x*＋1≤0

D．存在实数*x*∈**R**，使sin *x*＋cos *x*＝成立

解析：选B　对于A，非*p*应是*x*＋1≤0，因此A不正确；对于B，在△*ABC*中，*a*>*b*⇔*A*>*B*⇔cos *A*<cos *B*，因此B正确；对于C，命题非*p*应是∃*x*0∈**R**，*x*＋*x*0＋1≤0，因此C不正确；对于D，注意到sin *x*＋cos *x*＝sin∈[－， ]，且∉[－， ]，因此不存在实数*x*∈**R**，使sin *x*＋cos *x*＝成立，D不正确．

二、填空题(本大题共3小题，每小题5分，共15分)

7．命题“对任何*x*∈**R**，|*x*－2|＋|*x*－4|>3”的否定是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：全称命题的否定为特称命题，所以该命题的否定为：∃*x*0∈**R**，|*x*0－2|＋|*x*0－4|≤3.

答案：∃*x*0∈**R**，|*x*0－2|＋|*x*0－4|≤3

8．命题*p*：若*a*，*b*∈**R**，则*ab*＝0是*a*＝0的充分条件，命题*q*：函数*y*＝的定义域是[3，＋∞)，则“*p*∨*q*”、“*p*∧*q*”、“非*p*”中是真命题的有\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：依题意*p*假，*q*真，所以*p*∨*q*，非*p*为真．

答案：*p*∨*q*，非*p*

9．若命题“∀*x*∈**R**，*ax*2－*ax*－2≤0”是真命题，则实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：当*a*＝0时，不等式显然成立；当*a*≠0时，由题意知得－8≤*a*<0.综上，－8≤*a*≤0.

答案：[－8,0]

三、解答题(本大题共3小题，每小题12分，共36分)

10．写出下列命题的否定，并判断真假．

(1)*q*：∀*x*∈**R**，*x*不是5*x*－12＝0的根；

(2)*r*：有些素数是奇数；

(3)*s*：∃*x*0∈**R**，|*x*0|>0.

解：(1)非*q*：∃*x*0∈**R**，*x*0是5*x*－12＝0的根，真命题．

(2)非*r*：每一个素数都不是奇数，假命题．

(3)非*s*：∀*x*∈**R**，|*x*|≤0，假命题．

11．已知命题*p*：∀*x*∈[1,2]，*x*2－*a*≥0，命题*q*：∃*x*0∈**R**，*x*＋2*ax*0＋2－*a*＝0，若“*p*且*q*”为真命题，求实数*a*的取值范围．

解：由“*p*且*q*”为真命题，则*p*，*q*都是真命题．

*p*：*x*2≥*a*在[1,2]上恒成立，只需*a*≤(*x*2)min＝1，

所以命题*p*：*a*≤1；

*q*：设*f*(*x*)＝*x*2＋2*ax*＋2－*a*，存在*x*0∈**R**使*f*(*x*0)＝0，

只需*Δ*＝4*a*2－4(2－*a*)≥0，

即*a*2＋*a*－2≥0⇒*a*≥1或*a*≤－2，

所以命题*q*：*a*≥1或*a*≤－2.

由得*a*＝1或*a*≤－2

故实数*a*的取值范围是*a*＝1或*a*≤－2.

12．已知命题*p*：存在实数*m*，使方程*x*2＋*mx*＋1＝0有两个不等的负根；命题*q*：存在实数*m*，使方程4*x*2＋4(*m*－2)*x*＋1＝0无实根．若“*p*∨*q*”为真，“*p*∧*q*”为假，求*m*的取值范围．

解：存在实数*m*，使方程*x*2＋*mx*＋1＝0有两个不等的负根，则解得*m*>2，

即*m*>2时，*p*真．

存在实数*m*，使方程4*x*2＋4(*m*－2)*x*＋1＝0无实根，

则*Δ*＝16(*m*－2)2－16＝16(*m*2－4*m*＋3)<0，

解得1<*m*<3，即1<*m*<3时，*q*真．

因“*p*∨*q*”为真，所以命题*p*、*q*至少有一个为真，

又“*p*∧*q*”为假，所以命题*p*、*q*至少有一个为假，

因此，命题*p*、*q*应为一真一假，即命题*p*为真，命题*q*为假或命题*p*为假，命题*q*为真．

故或

解得*m*≥3或1<*m*≤2.