**直接证明与间接证明考点-高中数学选修1-2第二章**

1.**（2013·北京高考理科·Ｔ20）**已知{*an*}是由非负整数组成的无穷数列，该数列前*n*项的最大值记为*An*，第*n*项之后各项，…的最小值记为*Bn*，*dn*=*An*－*Bn．*

(1)若{*an*}为2，1，4，3，2，1，4，3…，是一个周期为4的数列(即对任意*n*∈**N**\*，)，写出*d*1，*d*2，*d*3，*d*4的值；

(2)设*d*为非负整数，证明：*dn*=－*d*(*n*=1,2,3…)的充分必要条件为{*an*}为公差为*d*的等差数列；

(3)证明：若*a*1=2，*dn*=1(*n*=1,2,3…)，则{*an*}的项只能是1或2，且有无穷多项为1

【解题指南】(1)根据{dn}的定义求.

(2)充分性:先证明{an}是不减数列,再利用定义求dn;

必要性:先证明{an}是不减数列,再利用定义证明等差.

(3)可通过取特殊值和反证法进行证明.

【解析】（1），，

，。

1. 充分性：

若为公差为的等差数列，则.

因为是非负整数，所以是常数列或递增数列.

，，

(n=1,2,3,…).

必要性：

若，假设是第一个使得的项，则

，，

，这与矛盾.

所以是不减数列.

，即，

是公差为的等差数列.

（3）①首先中的项不能是0，否则，与已知矛盾.

②中的项不能超过2，用反证法证明如下：

若中有超过2的项，设是第一个大于2的项，

中一定存在项为1，否则与矛盾.

当时，，否则与矛盾.

因此存在最大的i在2到k-1之间，使得，

此时，矛盾.

综上中没有超过2的项.

综合①②，中的项只能是1或2.

下面证明1有无数个，用反证法证明如下：

若为最后一个1，则，矛盾.

因此1有无数个.

2.**（2013·北京高考文科·Ｔ20）**给定数列a1，a2，…，an。对i=1，2，…n-l，该数列前i项的最大值记为Ai，后n-i项ai+1，ai+2，…，an的最小值记为Bi，di=Ai-Bi.

（1）设数列{an}为3，4，7，1，写出d1，d2，d3的值.

（2）设a1，a2，…，an（n≥4）是公比大于1的等比数列，且a1＞0.证明：d1，d2，…dn-1是等比数列。

（3）设d1，d2，…dn-1是公差大于0的等差数列，且d1＞0，证明：a1，a2，…，an-1是等差数列。

【解题指南】(1)利用di的公式,求d1,d2,d3的值.

(2)先求出{dn}的通项,再利用等比数列的定义证明{dn}是等比数列.

(3)先证明{an}是单调递增数列,再证明an是数列{an}的最小项,最后证明{an}是等差数列.

【解析】（1），，。

（2）由是公比大于1的等比数列，且a1＞0，可得的通项为且为单调递增数列。

于是当时，为定值。

因此d1，d2，…dn-1构成首项，公比的等比数列。

（3）若d1,d2,…,dn-1是公差大于0的等差数列,则0<d1<d2<…<dn-1,

先证明a1,a2,…,an-1是单调递增数列,否则,设ak是第一个使得ak≤ak-1成立的项,则

Ak-1=Ak,Bk-1≤Bk,因此dk-1=Ak-1-Bk-1≥Ak-Bk=dk,矛盾.

因此a1,a2,…,an-1是单调递增数列.

再证明an为数列{an}中的最小项,否则设ak<an(k=1,2,…,n-1),

显然k≠1,否则d1=A1-B1=a1-B1≤a1-a1=0,与di>0矛盾.

因而k≥2,此时考虑dk-1=Ak-1-Bk-1=ak-1-ak<0,矛盾.

因此,an为数列{an}中的最小项.

综上,*dk=Ak-Bk=ak-an(k=1,2,…,n-1)*,于是ak=dk+an,

从而a1,a2,…,an-1是等差数列.