**生活中的优化问题举例题库及答案-高中数学选修1-1第三章**

一、选择题

1．某箱子的容积与底面边长*x*的关系为*V*(*x*)＝*x*2 (0<*x*<60)，则当箱子的容积最大时，箱子底面边长为(　　)

A．30 B．40 C．50 D．其他

2．已知某生产厂家的年利润*y*(单位：万元)与年产量*x*(单位：万件)的函数关系式为*y*＝－*x*3＋81*x*－234，则使该生产厂家获取最大年利润的年产量为(　　)

A．13万件 B．11万件

C．9万件 D．7万件

3．某工厂要围建一个面积为512平方米的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁，当砌壁所用的材料最省时堆料场的长和宽分别为(　　)

A．32米，16米 B．30米，15米

C．40米，20米 D．36米，18米

4．若底面为等边三角形的直棱柱的体积为*V*，则其表面积最小时，底面边长为(　　)

A． B． C． D．2

5．要做一个圆锥形的漏斗，其母线长为20 cm，要使其体积最大，则高为(　　)

A． cm B． cm

C． cm D． cm

6．某公司生产某种产品，固定成本为20 000元，每生产一单位产品，成本增加100元，已知总收益*r*与年产量*x*的关系是*r*＝，则总利润最大时，年产量是(　　)

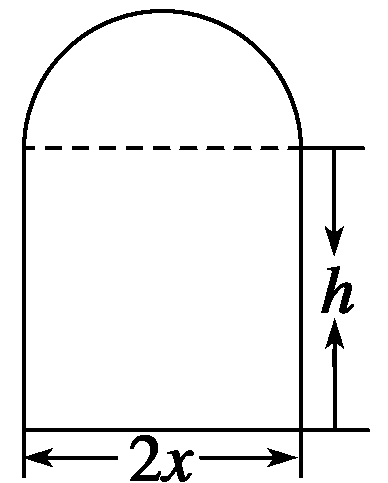
A．100 B．150 C．200 D．300

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 答案 |  |  |  |  |  |  |

二、填空题

7．某公司租地建仓库，每月土地占用费*y*1与仓库到车站的距离成反比，而每月库存货物的运费*y*2与到车站的距离成正比，如果在距离车站10千米处建仓库，这两项费用*y*1和*y*2分别为2万元和8万元．那么，要使这两项费用之和最小，仓库应建在离车站\_\_\_\_\_\_\_\_千米处．

8．如图所示，一窗户的上部是半圆，下部是矩形，如果窗户面积一定，窗户周长最小时，*x*与*h*的比为\_\_\_\_\_\_\_\_．



9．做一个无盖的圆柱形水桶，若需使其体积是27π，且用料最省，则圆柱的底面半径为\_\_\_\_\_\_\_\_．

三、解答题

10．某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两墩相距*m*米，余下工程只需建两端桥墩之间的桥面和桥墩．经测算，一个桥墩的工程费用为256万元，距离为*x*米的相邻两墩之间的桥面工程费用为(2＋)*x*万元．假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其它因素．记余下工程的费用为*y*万元．

(1)试写出*y*关于*x*的函数关系式；

(2)当*m*＝640米时，需新建多少个桥墩才能使*y*最小？

11．某商品每件成本9元，售价30元，每星期卖出432件．如果降低价格，销售量可以增加，且每星期多卖出的商品件数与商品单价的降低值*x*(单位：元，0≤*x*≤30)的平方成正比，已知商品单价降低2元时，一星期多卖出24件．

(1)将一个星期的商品销售利润表示成*x*的函数；

(2)如何定价才能使一个星期的商品销售利润最大？

能力提升

12．某单位用2 160万元购得一块空地，计划在该块地上建造一栋至少10层、每层2 000平方米的楼房．经测算，如果将楼房建为*x*(*x*≥10)层，则每平方米的平均建筑费用为560＋48*x*(单位：元)．为了使楼房每平方米的平均综合费用最少，该楼房应建为多少层？(注：平均综合费用＝平均建筑费用＋平均购地费用，平均购地费用＝)

13．已知某商品生产成本*C*与产量*q*的函数关系式为*C*＝100＋4*q*，价格*p*与产量*q*的函数关系式为*p*＝25－*q*，求产量*q*为何值时，利润*L*最大．



利用导数解决生活中的优化问题的一般步骤．

(1)分析实际问题中各变量之间的关系，建立实际问题的数学模型，写出实际问题中变量之间的函数关系*y*＝*f*(*x*)；

(2)求函数的导数*f*′(*x*)，解方程*f*′(*x*)＝0；

(3)比较函数在区间端点和*f*′(*x*)＝0的点的函数值的大小，最大(小)者为最大(小)值；

(4)写出答案．

**答案**

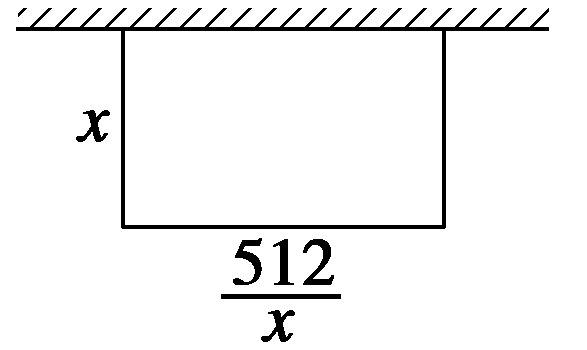
1．B　[*V*′(*x*)＝60*x*－*x*2＝0，*x*＝0或*x*＝40.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | (0,40) | 40 | (40,60) |
| *V*′(*x*) | ＋ | 0 | － |
| *V*(*x*) |  | 极大值 |  |

可见当*x*＝40时，*V*(*x*)达到最大值．]

2．C　[*y*′＝－*x*2＋81，令*y*′＝0，得*x*＝9或*x*＝－9(舍去)．当0<*x*<9时，*y*′>0；当*x*>9时，*y*′<0，故当*x*＝9时，函数有极大值，也是最大值．]

3．A　[要求材料最省就是要求新砌的墙壁总长度最短，



如图所示，设场地宽为*x*米，则长为米，因此新墙壁总长度*L*＝2*x*＋ (*x*>0)，

则*L*′＝2－.

令*L*′＝0，得*x*＝±16.∵*x*>0，∴*x*＝16.

当*x*＝16时，*L*极小值＝*L*min＝64，此时堆料场的长为＝32(米)．]

4．C　[设底面边长为*a*，直三棱柱高为*h*.

体积*V*＝*a*2*h*，所以*h*＝，

表面积*S*＝2·*a*2＋3*a*·＝*a*2＋，

*S*′＝*a*－，由*S*′＝0，得*a*＝.

经验证，当*a*＝时，表面积最小．]

5．D　[设高为*x* cm，则底面半径为 cm，

体积*V*＝*x*·(202－*x*2) (0<*x*<20)，

*V*′＝(400－3*x*2)，由*V*′＝0，得*x*＝或*x*＝－(舍去)．当*x*∈时，*V*′>0，当*x*∈时，*V*′<0，所以当*x*＝时，*V*取最大值．]

6．D　[由题意，总成本为*c*＝20 000＋100*x*，

所以总利润为*p*＝*r*－*c*

＝，

*p*′＝，

*p*′＝0，当0≤*x*≤400时，得*x*＝300；

当*x*>400时，*p*′<0恒成立，

易知当*x*＝300时，总利润最大．]

7．5

解析　依题意可设每月土地占用费*y*1＝，每月库存货物的运费*y*2＝*k*2*x*，其中*x*是仓库到车站的距离．

于是由2＝，得*k*1＝20；由8＝10*k*2，得*k*2＝.

因此两项费用之和为*y*＝＋，*y*′＝－＋，

令*y*′＝－＋＝0得*x*＝5(*x*＝－5舍去)，经验证，此点即为最小值点．

故当仓库建在离车站5千米处时，两项费用之和最小．

8．1∶1

解析　设窗户面积为*S*，周长为*L*，则*S*＝*x*2＋2*hx*，*h*＝－*x*，所以窗户周长

*L*＝π*x*＋2*x*＋2*h*＝*x*＋2*x*＋，*L*′＝＋2－.

由*L*′＝0，得*x*＝，*x*∈时，*L*′<0，

*x*∈时，*L*′>0，

所以当*x*＝ 时，*L*取最小值，

此时＝＝－＝－＝1.

9．3

解析　设半径为*r*，则高*h*＝＝.

∴水桶的全面积*S*(*r*)＝π*r*2＋2π*r*·＝π*r*2＋.

*S*′(*r*)＝2π*r*－，令*S*′(*r*)＝0，得*r*＝3.

∴当*r*＝3时，*S*(*r*)最小．

10．解　(1)设需新建*n*个桥墩，则(*n*＋1)*x*＝*m*，

即*n*＝－1 (0<*x*<*m*)，

所以*y*＝*f*(*x*)＝256*n*＋(*n*＋1)(2＋)*x*

＝256＋(2＋)*x*

＝＋*m*＋2*m*－256 (0<*x*<*m*)．

(2)由 (1)知，*f*′(*x*)＝－＋*mx*－

＝(*x*－512)．

令*f*′(*x*)＝0，得*x*＝512，所以*x*＝64.

当0<*x*<64时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)在区间(0,64)内为减函数；

当64<*x*<640时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)在区间(64,640)内为增函数，所以*f*(*x*)在*x*＝64处取得最小值，此时*n*＝－1＝－1＝9.

故需新建9个桥墩才能使*y*最小．

11．解　(1)设商品降低*x*元时，多卖出的商品件数为*kx*2，若记商品在一个星期的销售利润为*f*(*x*)，则依题意有

*f*(*x*)＝(30－*x*－9)·(432＋*kx*2)

＝(21－*x*)·(432＋*kx*2)，

又由已知条件24＝*k*·22，于是有*k*＝6，

所以*f*(*x*)＝－6*x*3＋126*x*2－432*x*＋9 072，*x*∈[0,30]．

(2)根据(1)，有*f*′(*x*)＝－18*x*2＋252*x*－432

＝－18(*x*－2)(*x*－12)．

当*x*变化时，*f*(*x*)与*f*′(*x*)的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | [0,2) | 2 | (2,12) | 12 | (12,30] |
| *f*′(*x*) | － | 0 | ＋ | 0 | － |
| *f*(*x*) |  | 极小值   |  | 极大值 |  |

故*x*＝12时，*f*(*x*)达到极大值．因为*f*(0)＝9 072，*f*(12)＝11 664，所以定价为30－12＝18(元)能使一个星期的商品销售利润最大．

12．解　设楼房每平方米的平均综合费用为*f*(*x*)元，则*f*(*x*)＝(560＋48*x*)＋

＝560＋48*x*＋(*x*≥10，*x*∈**N\***)，

*f*′(*x*)＝48－，

令*f*′(*x*)＝0得*x*＝15.

当*x*>15时，*f*′(*x*)>0；

当0<*x*<15时，*f*′(*x*)<0.

因此，当*x*＝15时，*f*(*x*)取最小值*f*(15)＝2 000.

所以为了使楼房每平方米的平均综合费用最少，该楼房应建为15层．

13．解　收入*R*＝*q*·*p*＝*q*＝25*q*－*q*2.

利润*L*＝*R*－*C*＝－(100＋4*q*)

＝－*q*2＋21*q*－100 (0<*q*<200)，

*L*′＝－*q*＋21，

令*L*′＝0，即－*q*＋21＝0，解得*q*＝84.

因为当0<*q*<84时，*L*′>0；

当84<*q*<200时，*L*′<0，

所以当*q*＝84时，*L*取得最大值．

所以产量*q*为84时，利润*L*最大．