**导数在研究函数中的应用难题-高中数学选修1-1第三章**

一、选择题

1．(2009年广州一模)设*f*、*g*是**R**上的可导函数，*f*′、*g*′分别为*f*、*g*的导函数，且*f*′*g*＋*fg*′<0，则当*a*<*x*<*b*时，有(　　)

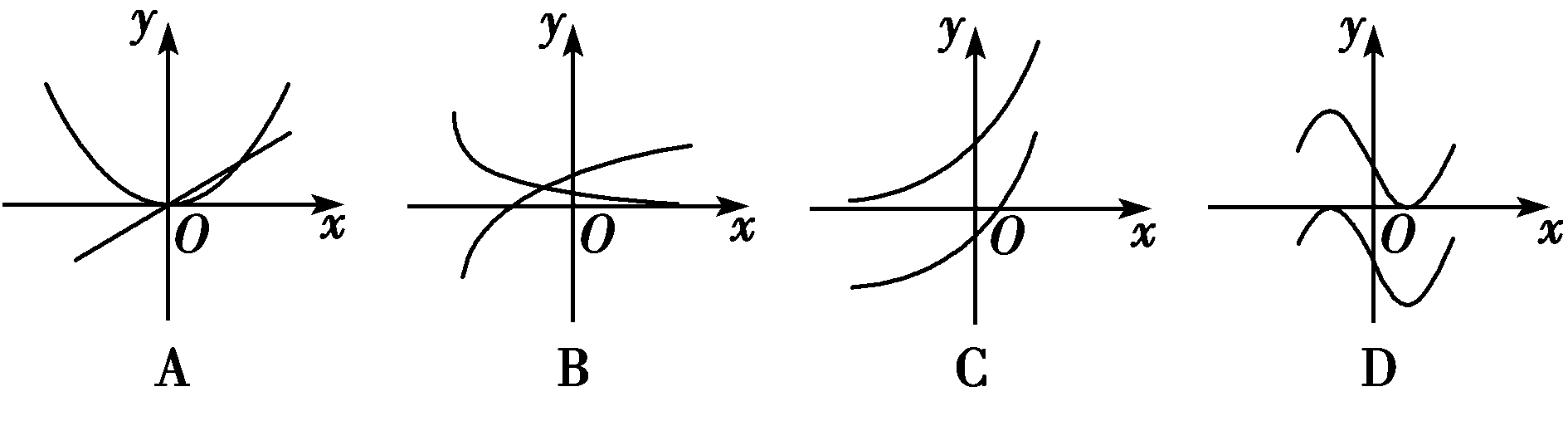
A．*fg*>*fg*

B．*fg*>*fg*

C．*fg*>*fg*

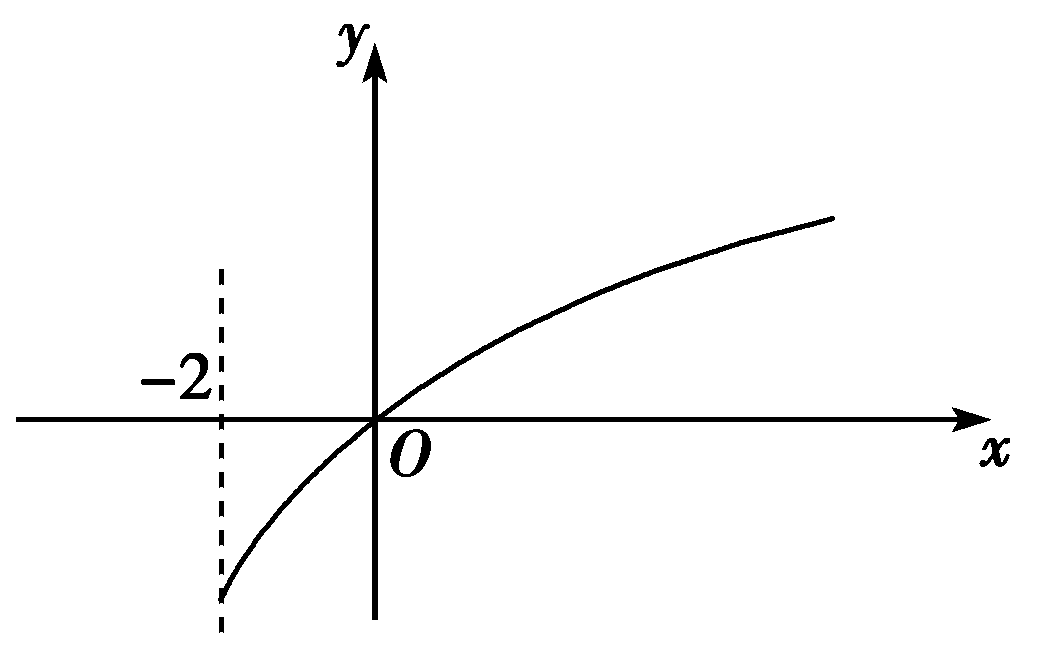
D．*fg*>*fg*

2．设*f*′(*x*)是函数*f*(*x*)的导函数，将*y*＝*f*(*x*)和*y*＝*f*′(*x*)的图象画在同一个直角坐标系中，不可能正确的是(　　)



3．已知二次函数*f*(*x*)＝*ax*2＋*bx*＋*c*的导数为*f*′(*x*)，*f*′(0)>0，对于任意实数*x*都有*f*(*x*)≥0，则的最小值为(　　)

A．3　　　　　B.　　　　　C．2　　　　　D.

4.(2009年韶关调研)已知函数*f*(*x*)的定义域为[－2,4]，且*f*(4)＝*f*(－2)＝1，*f*′(*x*)为*f*(*x*)的导函数，函数*y*＝*f*′(*x*)的图象如下图所示．

则平面区域所围成的面积是(　　)

A．2 B．4 C．5 D．8

5．(2009年天津重点学校二模)已知函数*y*＝*f*(*x*)是定义在**R**上的奇函数，且当*x*∈(－∞，0)时不等式*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)＜0成立， 若*a*＝30.3*f*(30.3)，*b*＝(logπ3)*f*(logπ3)，*c*＝*f*，则*a*，*b*，*c*的大小关系是(　　)

A．*a*＞*b*＞*c* B．*c*＞*b*＞*a*

C．*c*＞*a*＞*b* D．*a*＞*c*＞*b*

二、填空题

6．函数*f*(*x*)＝*x*2－2ln *x*的单调减区间是\_\_\_\_\_\_\_\_．

7．若*f*(*x*)＝－*x*2＋*b*ln(*x*＋2)在(－1，＋∞)上是减函数，则*b*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

8．有一个长度为5 m的梯子贴靠在笔直的墙上，假设其下端沿地板以3 m/s的速度离开墙脚滑动，求当其下端离开墙脚1.4 m时，梯子上端下滑的速度为\_\_\_\_\_\_\_\_．

三、解答题

9．已知函数*f*(*x*)＝*x*2＋ln *x*－1.

(1)求函数*f*(*x*)在区间[1，e](e为自然对数的底)上的最大值和最小值；

(2)求证：在区间(1，＋∞)上，函数*f*(*x*)的图象在函数*g*(*x*)＝*x*3的图象的下方．

(3)(理)求证：[*f*′(*x*)]*n*－*f*′(*xn*)≥2*n*－2(*n*∈**N**\*)．

10．已知*a*为实数，*f*(*x*)＝(*x*2－4)(*x*－*a*)．

(1)若*f*′(－1)＝0，求*f*(*x*)在[－2,2]上的最大值和最小值；

(2)若*f*(*x*)在(－∞，－2]和[2，＋∞)上都是递增的，求*a*的取值范围．

**参考答案**

1．*C*　2.*D*

3．解析：f′(x)＝2ax＋b，f′(0)＝b>0对于任意实数x都有f(x)≥0得a>0，b2－4ac≤0，∴b2≤4ac，

∴c>0，＝＝＋1≥＋1≥1＋1＝2，当取a＝c时取等号．

答案：*C*

4．*B*　5.*C*

6．解析：首先考虑定义域(0，＋∞)，由f′(x)＝2x－

＝≤0及x>0知0<x≤1.

答案：(0,1]

7．解析：由题意可知f′(x)＝－x＋<0在x∈(－1，＋∞)上恒成立，即b<x(x＋2)在x∈(－1，＋∞)上恒成立，由于x≠－1，所以b≤－1.

答案：(－∞，－1]

8．解析：设经时间t秒梯子上端下滑s米，则

s＝5－，

当下端移开1.4 *m*时，t0＝＝，

又s′＝－(25－9t2)－·(－9·2t)＝9t，

所以s′(t0)＝9×·＝0.875(*m*/*s*)．

答案：0.875(*m*/*s*)

9．解析：(1)∵f′(x)＝x＋，

当x∈[1，*e*]时，f′(x)>0.∴函数f(x)在[1，*e*]上为增函数，

∴f(x)*max*＝f(*e*)＝*e*2，f(x)*min*＝f(1)＝－.

(2)证明：令F(x)＝f(x)－g(x)＝x2＋*ln* x－1－x3

则F′(x)＝x＋－2x2＝

＝.

∵当x>1时F′(x)<0，∴函数F(x)在区间(1，＋∞)上为减函数，∴F(x)<F(1)＝－1－<0，

即在(1，＋∞)上，f(x)<g(x)．

∴在区间(1，＋∞)上，函数f(x)的图象在函数g(x)＝x3的图象的下方．

(3)(理)证明：∵f′(x)＝x＋，

当n＝1时，不等式显然成立；当n≥2时，

∵[f′(x)]n－f′(xn)＝n－

＝*C*xn－2＋*C*xn－3＋…＋*C*，①

[f′(x)]n－f′(xn)＝*C*＋*C*＋…＋*C*xn－2，②

①＋②得[f′(x)]n－f′(xn)＝

≥*C*＋*C*＋…＋*C*＝2n－2(当且仅当x＝1时“＝”成立)．

∴当n≥2时，不等式成立．

综上所述得[f′(x)]n－f′(xn)≥2n－2(n∈**N**＋)．

10．解析：(1)由原式得*f*(*x*)＝*x*3－*ax*2－4*x*＋4*a*，

∴*f*′(*x*)＝3*x*2－2*ax*－4.

由*f*′(－1)＝0得*a*＝，

此时有*f*(*x*)＝(*x*2－4)，*f*′(*x*)＝3*x*2－*x*－4.

由*f*′(*x*)＝0得*x*＝或*x*＝－1，

当*x*在[－2,2]变化时，*f*′(*x*)，*f*(*x*)的变化如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (－2，－1) | －1 |  |  |  |
| *f*′(*x*) | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |
| *f*(*x*) | 递增 | 极大值 | 递减 | 极小值  － | 递增 |

∵*f*(*x*)极小＝*f*＝－，*f*(*x*)极大＝*f*(－1)＝，

又*f*(－2)＝0，*f*(2)＝0，

所以*f*(*x*)在[－2,2]上的最大值为，最小值为－.

(2)法一：*f*′(*x*)＝3*x*2－2*ax*－4的图象为开口向上且过点(0，－4)的抛物线，由条件得*f*′(－2)≥0，*f*′(2)≥0，

即，∴－2≤*a*≤2.

所以*a*的取值范围为[－2,2]．

法二：令*f*′(*x*)＝0即3*x*2－2*ax*－4＝0，由求根公式得：

*x*1,2＝(*x*1<*x*2)，

所以*f*′(*x*)＝3*x*2－2*ax*－4在和上非负．

由题意可知，当*x*≤－2或*x*≥2时，*f*′(*x*)≥0，

从而*x*1≥－2，*x*2≤2，

即，解不等式组得：－2≤*a*≤2.

即*a*的取值范围是[－2,2]．