**命题及其关系解题方法与技巧-高中数学选修1-1第一章**

**类型一：命题的定义**

**例1．**判断下列语句是否为命题？若是，判断其真假.

(1)；

(2) 时, ；

(3) 你是男生吗？

(4) 求证：是无理数.

**思路点拨:** 依据命题的定义判断

**解析：**

(1) 不是命题；由于无法确定变量的值，所以无法确定其真假．

(2) 是命题；假命题．

(3) 不是命题；这是一个疑问句，没有做出判断．

(4) 不是命题；这是一个祈使句，没有做出判断．

**总结升华：**对于命题真假的判断应根据已学习过的已有定义、定理、公理及已有结论等进行。

**举一反三：**

【变式1】下列语句中是命题的是（ ）

A． B．{0}∈N C．元素与集合 D．真子集

**【答案】**B

【变式2】判断下列语句是否是命题。

（1）这是一棵大树；

（2）sin30°=；

（3）x2+1>0；

（4）梯形是平行四边形。

**【答案】**

（1）不是，无法确定“大”；（2）是；（3）是；（4）是。

【变式3】判断下列语句中哪些是命题，是命题的判断其是真命题还是假命题。

（1）末位是0的整数能被5整除；

（2）平行四边形的对角线相等且互相平分；

（3）两直线平行，则斜率相等；

（4）△ABC中，若∠A=∠B，则sinA=sinB；

（5）余弦函数是周期函数吗？

**【答案】**

（1）是命题，真命题；

（2）是命题，假命题；

（3）是命题，假命题；

（4）是命题，真命题；

（5）不是命题。

**例2.** 将下列命题改写成“若p则q”的形式，并判断真假。

（1）偶数能被2整除；

（2）奇函数的图象关于原点对称；

（3）同弧所对的圆周角不相等。

**解析：**

（1）若一个数是偶数，则它能被2整除；真命题。

（2）若一个函数是奇函数，则它的图象关于原点对称；真命题。

（3）若两个角为同弧所对的圆周角，则它们不相等；假命题。

**总结升华：**对于一个命题要把条件与结论分离开，首先应弄清命题的本身含义。

**举一反三：**

【变式1】指出下列命题的条件p和结论q。

（1）若空间四边形为正四面体，则顶点在底面上的射影为底面的中心；

（2）若两条直线a和b都和直线c平行，则直线a和直线b平行。

**【答案】**

（1）条件p：空间四边形为正四面体；结论q：顶点在底面上的射影为底面的中心。

（2）条件p：两直线a、b都和直线c平行；结论q：直线a和b平行。

【变式2】把命题“6是12和24的公约数”写成若p则q的形式。

**【答案】**若一个数等于6，则这个数是12和24的公约数。

【变式3】命题“一元二次方程有两个不相等的实数根”，条件p：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，结论q：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；是\_\_\_\_\_\_\_\_命题。

**【答案】**条件p：方程是一元二次方程；结论q：这个方程有两个不相等的实数根；假命题。

**类型二：命题的四种形式**

**例3.** 写出下列的命题的逆命题，否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

(1) 在中，若,则；

(2)直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方；

(3)当时，若, 则.

**思路点拨:** 由原命题写出逆命题，否命题和逆否命题时注意规律：

①交换原命题的条件和结论.所得命题就是逆命题.

②同时否定原命题的条件和结论所得命题就是否命题.

③交换原命题的条件和结论并且同时否定.所得命题就是逆否命题.

**解析：**

(1)逆命题：在中，若，则（真命题）；

否命题：在中，若,则（真命题）；

逆否命题：在中，若，则（真命题）.

(2)逆命题：如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形为直角三角形（真命题）；

否命题：若一个三角形不是直角三角形，那么该三角形任意两边的平方和不等于第三边的平方（真命题）；

逆否命题：如果一个三角形任意两边的平方和不等于第三边的平方，那么这个三角形不是直角三角形（真命题）.

(3)逆命题：当时，若,则（真命题）；

否命题：当时，若,则（真命题）；

逆否命题：当时，若,则（真命题）.

**总结升华：**

①一般地，先将命题改写成“如果…，那么…”的形式，再写出其他命题形式；某些命题存在大前提，写其它命题时应注意保留.

②互为逆否命题的两个命题是等价的，同为真或同为假，因此在判定真假时，只需判定二者中的一个．

**举一反三：**

【变式】写出下列的命题的逆命题，否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

（1）对顶角相等；

（2）空集A是非空集合B的真子集；

**【答案】**

（1）原命题：如果两角是对顶角，那么这两角相等（真命题）；

逆命题：如果两角相等，那么两角是对顶角（假命题）；

否命题：如果两角不是对顶角，那么这两角不相等（假命题）；

逆否命题：如果两角不相等，那么这两角不是对顶角（真命题）.

（2）原命题：若A是空集，则A是非空集合B的真子集（真命题）；

逆命题：若A是非空集合B的真子集，则A是空集（假命题）；

否命题：若A不是空集，则A不是非空集合B的真子集（假命题）；

逆否命题：若A不是非空集合B的真子集，则A不是空集（真命题）。

**注意：**判断命题正确与否时，可判断其逆否命题。互为逆否命题的命题同真同假。

**例4．**设命题: 若，则关于的方程有实数根．试写出它的逆命题，否命题和逆否命题，并分别判断其真假．

**思路点拨:** 判断原命题，逆命题，否命题，逆否命题的真假时，只要判断原命题与逆命题的真假，就可知道其它两个命题的真假，不必一一判断.

**解析：**

逆命题：若关于的方程有实数根，则.

否命题：若,则关于的方程无实数根．

逆否命题：若关于的方程无实数根，则.

①先判断原命题和逆否命题的真假.

∵, ∴ 当时，方程有实数根．

∵当时，成立，∴ 方程有实数根，∴原命题为真，逆否命题也为真．

②判断逆命题和否命题的真假

当方程有实数根，即时，推不出，∴逆命题为假，否命题也为假．

**总结升华：**先将命题中的条件等价转化，然后关于不等式的集合的命题可以借助于集合的韦恩图解决.

**举一反三：**

【变式1】试写出下列命题的逆命题，否命题和逆否命题，并分别判断其真假．

（1）当集合，时，若，则.

（2）若，则， （3）若，则

**【答案】**

（1）原命题：当集合，时，若，则（假命题）；

逆命题：当集合，时，若，则（真命题）；

否命题：当集合，时，若，则（真命题）；

逆否命题：当集合，时，若，则（假命题）.

（2）原命题：若，则（真命题）；

逆命题：若，则（假命题）；

否命题：若，则（假命题）；

逆否命题：若，则（真命题）.

（3）原命题：若，则（假命题）；

逆命题：若，则（真命题）；

否命题：若，则（真命题）；

逆否命题：若，则（假命题）.

【变式2】已知命题：“如果，那么关于的不等式的解集是空集”，写出它的逆命题，否命题，逆否命题，并判断它们的真假.

**【答案】**

逆命题：如果关于的不等式的解集是空集，那么；

否命题：如果,那么关于的不等式的解集不是空集；

逆否命题：如果关于的不等式的解集不是空集，那么.

①先判断原命题的真假.

当时，,，

故的解集为，故原命题为真，则逆否命题亦真.

② 对于逆命题，当的解为空集时，

先研究得，满足题意，

这样与矛盾，故命题为假，而否命题与逆命题互为逆否命题，故否命题亦为假.

**类型三：反证法**

**例5．**若a、b、c均为实数，且，，，求证：a、b、c中至少有一个大于0。

**思路点拨:** 利用反证法证明。

**证明：**假设a、b、c都不大于0，即a≤0，b≤0，c≤0，则a+b+c≤0，

而。

∵π－3＞0，且(x―1)2+(y―1)2+(z―1)2≥0，

∴a+b+c＞0，这与a+b+c≤0矛盾，

因此a、b、c中至少有一个大于0。

**总结升华：**

（1）证明唯一性、无理性等问题可用反证法。

（2）命题以否定形式出现（如不存在、不相交等），并伴有“至少……”“不都……”“都不……”“没有……”等指示性词语，此时也可选用反证法。

（3）正难则反，即若从正面考虑解决不好入手或比较麻烦，可以从命题的反面入手解决。

（4）得出矛盾，一般有三种：一是与原命题的已知条件矛盾；二是与自身矛盾；三是与另一个已知的真命题矛盾。

**举一反三：**

【变式1】若,证明：关于的方程与中，至少有一个方程有实数根．

**【答案】**

反证法：假设两方程都无实根，则且,故有.

∵，



这与矛盾，∴ 假设不成立，

∴至少有一个方程有实数根．

【变式2】已知a、b、c是一组勾股数，即a2+b2=c2，求证：a、b、c不可能都是奇数。

**【答案】**假设a、b、c都是奇数，则a2、b2、c2也是奇数

∴a2+b2为偶数，c2是奇数，∴a2+b2≠c2，

这与已知a2+b2=c2，∴ 假设不成立，

∴a、b、c不可能都是奇数。

**类型四：充要条件**

**例6.** 指出下列各题中，是的什么条件？

（1）：，：和是对顶角.

（2），；

**思路点拨:** 这里应根据充要条件的概念作判断.

**解析：**

（1）∵且，

∴是的必要不充分条件，是的充分不必要条件.

（2）∵

∴，但，

∴是的充分不必要条件，是的必要不充分条件.

**总结升华：**有时需要将条件等价转化后再判定.

**举一反三：**

【变式1】指出下列各题中，是的什么条件？

(1) : ， : ；

(2) : ，: 抛物线过原点

(3) : 一个四边形是矩形，: 四边形的邻边相等

**【答案】**

(1)∵: 或, : 

∴且,∴是的必要不充分条件；

(2)∵且,∴是的充要条件；

(3)∵且，∴是的既不充分条件也不必要条件.

【变式2】判断下列各题中是的什么条件。

（1）:且, :

（2）:, : .

**【答案】**

（1）是的充分不必要条件。

∵且时，成立；

反之，当时，只要求、同号即可。

∴必要性不成立。

（2）是的既不充分也不必要条件

∵在的条件下才有成立。

∴充分性不成立，同理必要性也不成立。

【变式3】设甲，乙，丙是三个命题，如果甲是乙的充要条件，丙是乙的充分非必要条件，那么丙是甲的（ ）.

A、充分非必要条件 B、必要非充分条件

C、充要条件 D、既不充分也不必要条件

**【答案】**选A；

**解析：**由已知有甲乙，丙乙且乙丙.

于是有丙乙甲，且甲丙（否则若甲丙，而乙甲丙，与乙丙矛盾）

故丙甲且甲丙，所以丙是甲的充分非必要条件.

**例7**.下列各小题中，是的什么条件？（在“充分非必要条件”，“必要非充分条件”，“充要条件”“既不充分也不必要条件”中选一种）

(1) :，:或；

(2) :， :或；

（3）:，:关于的方程有实数根.

**思路点拨:** 先等价转化简化条件或，然后通过集合间的关系考察即可得出命题的关系.

**解析：**

(1) ∵，∴，即:，

又

∴且，

所以是的充分不必要条件.

(2) ∵， ∴或，即:或，

又

∴且，即

所以是的充分必要条件.

（3）∵关于的方程有实数根，

∴ 即，∴:，

又

∴且，

故是的必要而不充分条件.

**总结升华：**

①先对已知条件进行等价转化化简，然后由定义判断；

②不等式（解集）表示的条件之间的相互关系可以借助集合间的关系判断。

**举一反三：**

【变式1】下列各小题中，是的什么条件？

（1）:, : ；

(2) :， :

**【答案】**

（1）是的必要不充分条件；

(2) 是的充分不必要条件。

【变式2】设条件甲为“”， 条件乙为“”那么甲是乙的（ ）

A、充分不必要条件 B、必要不充分条件

C、充要条件 D、既不充分也不必要条件

**【答案】**A

【变式3】设，则条件“”的一个必要不充分条件为（ ）

A. B. C. D.

**【答案】**A

**例8．**设x、y∈R，求证：|x+y|=|x|+|y|成立的充要条件是xy≥0。

**解析：**

**充分性：**若xy=0，那么①x=0，y≠0；②x≠0，y=0；③x=0，y=0，

于是|x+y|=|x|+|y|

如果xy＞0，即x＞0，y＞0或x＜0，y＜0，

当x＞0，y＞0时，|x+y|=x+y=|x|+|y|。

当x＜0，y＜0时，|x+y|=－(x+y)=－x+(－y)=|x|+|y|。

总之，当xy≥0时，有|x+y|=|x|+|y|。

**必要性：**由|x+y|=|x|+|y|及x、y∈R，得(x+y)2=(|x|+|y|)2，

即x2+2xy+y2=x2+2|xy|+y2，|xy|=xy，

∴xy≥0。

综上可得|x+y|=|x|+|y|成立的充要条件是xy≥0。

**总结升华：**充要条件的证明关键是根据定义确定哪是已知条件，哪是结论，然后搞清楚充分性是证明哪一个命题，必要性是证明哪一个命题。

判断命题的充要关系有三种方法：

（1）定义法；

（2）等价法，即利用与；与；与的等价关系，对于条件或结论是不等关系（否定式）的命题，一般运用等价法。

（3）利用集合间的包含关系判断，若，则A是B的充分条件或B是A的必要条件；若A=B，则A是B的充要条件。

**举一反三：**

【变式1】已知a, b, c都是实数，证明ac<0是关于x的方程ax2+bx+c=0有一个正根和一个负根的充要条件.

**【答案】**

**充分性:**若ac<0，则Δ=b2-4ac>0，方程ax2+bx+c=0有两个相异实根，设为x1, x2,

∵ac<0, ∴x1·x2=<0，即x1,x2的符号相反，即方程有一个正根和一个负根.

**必要性:**若方程ax2+bx+c=0有一个正根和一个负根，设为x1,x2,且x1>0, x2<0，

则x1·x2=<0，∴ac<0

综上可得ac<0是方程ax2+bx+c=0有一个正根和一个负根的充要条件.

【变式2】求关于x的方程ax2+2x+1=0至少有一个负的实根的充要条件。

**【答案】**

（1）a=0时适合。

（2）当a≠0时，显然方程没有零根，

若方程有两异号的实根，则必须满足；

若方程有两个负的实根，则必须满足

综上知，若方程至少有一个负的实根，则a≤1；

反之，若a≤1，则方程至少有一个负的实根，

因此，关于x的方程ax2+2x+1=0至少有一个负的实根的充要条件是a≤1

**注意：**

①a=0的情况不要忽视；

②若令，由于，从而排除了方程有一个负根，另一个根为零的情形。