**基本不等式√ab≤(a+b)/2难题-高中数学必修5第三章**

**典题精讲**

例1（1）已知0＜x＜，求函数y=x(1-3x)的最大值;

（2）求函数y=x+的值域.

**思路分析：**（1）由极值定理,可知需构造某个和为定值，可考虑把括号内外x的系数变成互为相反数；（2）中，未指出x＞0，因而不能直接使用基本不等式，需分x＞0与x＜0讨论.

（1）解法一：∵0＜x＜,∴1-3x＞0.

∴y=x(1-3x)= ·3x(1-3x)≤［］2=，当且仅当3x=1-3x，即x=时，等号成立.∴x=时，函数取得最大值.

解法二：∵0＜x＜,∴-x＞0.

∴y=x(1-3x)=3x(-x)≤3［］2=，当且仅当x=-x,即x=时，等号成立.

∴x=时，函数取得最大值.

（2）解：当x＞0时，由基本不等式，得y=x+≥2=2，当且仅当x=1时，等号成立.

当x＜0时，y=x+=-［(-x)+］.

∵-x＞0,∴(-x)+≥2,当且仅当-x=,即x=-1时，等号成立.

∴y=x+≤-2.

综上,可知函数y=x+的值域为(-∞,-2］∪［2,+∞).

**绿色通道：**利用基本不等式求积的最大值，关键是构造和为定值，为使基本不等式成立创造条件，同时要注意等号成立的条件是否具备.

**变式训练**1当x＞-1时，求f(x)=x+的最小值.

**思路分析：**x＞-1x+1＞0,变x=x+1-1时x+1与的积为常数.

解：∵x＞-1,∴x+1＞0.

∴f(x)=x+=x+1+-1≥2-1=1.

当且仅当x+1=,即x=0时,取得等号.

∴f(x)min=1.

**变式训练**2求函数y=的最小值.

**思路分析：**从函数解析式的结构来看，它与基本不等式结构相差太大，而且利用前面求最值的方法不易求解，事实上，我们可以把分母视作一个整体，用它来表示分子，原式即可展开.

解：令t=x2+1，则t≥1且x2=t-1.

∴y==.

∵t≥1,∴t+≥2=2,当且仅当t=,即t=1时，等号成立.

∴当x=0时，函数取得最小值3.

例2已知x＞0,y＞0，且+=1，求x+y的最小值.

**思路分析：**要求x+y的最小值，根据极值定理，应构建某个积为定值，这需要对条件进行必要的变形，下面给出三种解法，请仔细体会.

解法一：利用“1的代换”,

∵+=1,

∴x+y=(x+y)·(+)=10+.

∵x＞0,y＞0,∴≥2=6.

当且仅当，即y=3x时，取等号.

又+=1,∴x=4,y=12.

∴当x=4,y=12时，x+y取得最小值16.

解法二：由+=1，得x=.

∵x＞0,y＞0,∴y＞9.

x+y=+y=y+=y++1=(y-9)++10.

∵y＞9,∴y-9＞0.

∴≥2=6.

当且仅当y-9=，即y=12时，取得等号，此时x=4.∴当x=4,y=12时，x+y取得最小值16.解法三：由+=1，得y+9x=xy,

∴(x-1)(y-9)=9.

∴x+y=10+(x-1)+(y-9)≥10+2=16,

当且仅当x-1=y-9时取得等号.又+=1,

∴x=4,y=12.

∴当x=4,y=12时，x+y取得最小值16.

**绿色通道：**本题给出了三种解法，都用到了基本不等式，且都对式子进行了变形，配凑出基本不等式满足的条件，这是经常需要使用的方法，要学会观察,学会变形，另外解法二，通过消元,化二元问题为一元问题，要注意根据被代换的变量的范围对另外一个变量的范围的影响.

**黑色陷阱：**本题容易犯这样的错误：

+≥2①,即≤1,∴≥6.

∴x+y≥2≥2×6=12②.∴x+y的最小值是12.

产生不同结果的原因是不等式①等号成立的条件是=，不等式②等号成立的条件是x=y.在同一个题目中连续运用了两次基本不等式,但是两个基本不等式等号成立的条件不同，会导致错误结论.

**变式训练**已知正数a,b,x,y满足a+b=10,=1，x+y的最小值为18，求a,b的值.

**思路分析：**本题属于“1”的代换问题.

**解：**x+y=(x+y)()=a++b=10+.

∵x,y＞0,a,b＞0，

∴x+y≥10+2=18，即=4.

又a+b=10，

∴或

例3求f(x)=3+lgx+的最小值（0＜x＜1）.

**思路分析：**∵0＜x＜1,

∴lgx＜0,＜0不满足各项必须是正数这一条件，不能直接应用基本不等式，正确的处理方法是加上负号变正数.

解：∵0＜x＜1,∴lgx＜0,＜0.∴-＞0.

∴(-lgx)+(-)≥2=4.

∴lgx+≤-4.∴f(x)=3+lgx+≤3-4=-1.

当且仅当lgx=,即x=时取得等号.

则有f(x)=3+lgx+ (0＜x＜1)的最小值为-1.

**黑色陷阱：**本题容易忽略0＜x＜1这一个条件.

**变式训练**1已知x＜，求函数y=4x-2+的最大值.

**思路分析：**求和的最值，应凑积为定值.要注意条件x＜，则4x-5＜0.

**解：**∵x＜,∴4x-5＜0.

y=4x-5++3=-［(5-4x)+］+3

≤-2+3=-2+3=1.

当且仅当5-4x=,即x=1时等号成立.

所以当x=1时，函数的最大值是1.

**变式训练**2当x＜时，求函数y=x+的最大值.

**思路分析：**本题是求两个式子和的最大值,但是x·并不是定值,也不能保证是正值,所以,必须使用一些技巧对原式变形.可以变为y=（2x-3）++=-（）+,再求最值.

解：y=（2x-3）++=-（）+，

∵当x＜时，3-2x＞0，

∴≥=4，当且仅当，即x=-时取等号.

于是y≤-4+=，故函数有最大值.

例4如图3-4-1，动物园要围成相同的长方形虎笼四间，一面可利用原有的墙，其他各面用钢筋网围成.

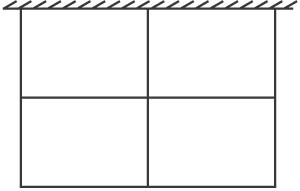


图3-4-1

（1）现有可围36 m长网的材料，每间虎笼的长、宽各设计为多少时，可使每间虎笼面积最大？

（2）若使每间虎笼面积为24 m2，则每间虎笼的长、宽各设计为多少时，可使围成四间虎笼的钢筋总长度最小？

**思路分析：**设每间虎笼长为x m，宽为y m，则（1）是在4x+6y=36的前提下求xy的最大值；而(2)则是在xy=24的前提下来求4x+6y的最小值.

**解：**（1）设每间虎笼长为x m，宽为y m，则由条件,知4x+6y=36，即2x+3y=18.

设每间虎笼的面积为S，则S=xy.

方法一：由于2x+3y≥2=2,

∴2≤18,得xy≤，即S≤.

当且仅当2x=3y时等号成立.

由解得

故每间虎笼长为4.5 m，宽为3 m时，可使面积最大.

方法二:由2x+3y=18，得x=9-y.

∵x＞0,∴0＜y＜6.

S=xy=(9-y)y= (6-y)y.

∵0＜y＜6,∴6-y＞0.

∴S≤［］2=.

当且仅当6-y=y,即y=3时，等号成立，此时x=4.5.故每间虎笼长4.5 m,宽3 m时，可使面积最大.

(2)由条件知S=xy=24.

设钢筋网总长为l,则l=4x+6y.

方法一:∵2x+3y≥2=2=24,

∴l=4x+6y=2(2x+3y)≥48,当且仅当2x=3y时,等号成立.

由解得

故每间虎笼长6 m，宽4 m时，可使钢筋网总长最小.

方法二:由xy=24，得x=.

∴l=4x+6y=+6y=6(+y)≥6×2=48,当且仅当=y，即y=4时，等号成立，此时x=6.

故每间虎笼长6 m,宽4 m时，可使钢筋总长最小.

**绿色通道：**在使用基本不等式求函数的最大值或最小值时，要注意：

（1）x,y都是正数；

（2）积xy（或x+y）为定值；

（3）x与y必须能够相等，特别情况下，还要根据条件构造满足上述三个条件的结论.

**变式训练**某工厂拟建一座平面图为矩形且面积为200 平方米的三级污水处理池(平面图如图3-4-2所示),由于地形限制,长、宽都不能超过16米,如果池外周壁建造单价为每米400元,中间两道隔墙建造单价为每米248元,池底建造单价为每平方米80元,池壁的厚度忽略不计,试设计污水处理池的长和宽,使总造价最低,并求出最低造价.

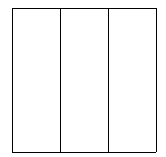


图3-4-2

**思路分析：**在利用均值不等式求最值时,必须考虑等号成立的条件,若等号不能成立,通常要用函数的单调性进行求解.

解：设污水处理池的长为x米,则宽为米(0＜x≤16,0＜≤16),∴12.5≤x≤16.

于是总造价Q(x)=400(2x+2×)+248×2×+80×200.

=800(x+)+16 000≥800×2+16 000=44 800,

当且仅当x= (x＞0),即x=18时等号成立,而18［12.5,16］,∴Q(x)＞44 800.

下面研究Q(x)在［12.5,16］上的单调性.

对任意12.5≤x1＜x2≤16,则x2-x1＞0,x1x2＜162＜324.

Q(x2)-Q(x1)=800［(x2-x1)+324()］

=800×＜0,

∴Q(x2)＞Q(x1).∴Q(x)在［12.5,16］上是减函数.

∴Q(x)≥Q(16)=45 000.

答:当污水处理池的长为16米,宽为12.5米时,总造价最低,最低造价为45 000元.

**问题探究**

问题某人要买房,随着楼层的升高,上下楼耗费的精力增多,因此不满意度升高.当住第n层楼时,上下楼造成的不满意度为n.但高处空气清新,嘈杂音较小,环境较为安静,因此随着楼层的升高,环境不满意度降低.设住第n层楼时,环境不满意程度为.则此人应选第几楼,会有一个最佳满意度.

**导思：**本问题实际是求n为何值时,不满意度最小的问题,先要根据问题列出一个关于楼层的函数式,再根据基本不等式求解即可.

**探究：**设此人应选第n层楼,此时的不满意程度为y.

由题意知y=n+.

∵n+≥2,

当且仅当n=,即n=时取等号.

但考虑到n∈**N**\*,

∴n≈2×1.414=2.828≈3,

即此人应选3楼,不满意度最低.