**等比数列难题-高中数学必修5第二章**

**类型一：等比数列的通项公式**

**例1．**等比数列中，, ,求.

**思路点拨：**由等比数列的通项公式，通过已知条件可列出关于和的二元方程组，解出和，可得；或注意到下标，可以利用性质可求出、，再求.

**解析：**

**法一：**设此数列公比为，则

由(2)得：..........(3)

∴.

由(1)得： , ∴ ......(4)

(3)÷(4)得：，

∴,解得或

当时，，；

当时，，.

**法二：**∵,又,

∴、为方程的两实数根，

∴ 或 

∵, ∴或.

**总结升华：**

①列方程（组）求解是等比数列的基本方法，同时利用性质可以减少计算量；

②解题过程中具体求解时，要设法降次消元，常常整体代入以达降次目的，故较多变形要用除法（除式不为零）.

**举一反三：**

【变式1】{an}为等比数列，a1=3，a9=768，求a6。

**【答案】**±96

**法一：**设公比为q，则768=a1q8，q8=256，∴q=±2，∴a6=±96；

**法二：**a52=a1a9a5=±48q=±2，∴a6=±96。

【变式2】{an}为等比数列，an＞0，且a1a89=16，求a44a45a46的值。

**【答案】**64；

∵，又an＞0，∴a45=4

∴。

【变式3】已知等比数列，若，，求。

**【答案】**或；

**法一：**∵，∴，∴

从而解之得，或，

当时，；当时，。

故或。

**法二**：由等比数列的定义知，

代入已知得



将代入（1）得，

解得或

由（2）得或 ，以下同方法一。

**类型二：等比数列的前n项和公式**

**例2．**设等比数列{an}的前n项和为Sn，若S3+S6=2S9，求数列的公比q.

**解析：**若q=1，则有S3=3a1，S6=6a1，S9=9a1.

因a1≠0，得S3+S6≠2S9，显然q=1与题设矛盾，故q≠1.

由得，，

整理得q3(2q6-q3-1)=0，

由q≠0，得2q6-q3-1=0，从而(2q3+1)(q3-1)=0，

因q3≠1，故，所以。

**举一反三：**

【变式1】求等比数列的前6项和。

**【答案】**；

∵，，

∴。

【变式2】已知：{an}为等比数列，a1a2a3=27，S3=13，求S5.

**【答案】**；

∵，，则a1=1或a1=9

∴.

【变式3】在等比数列中，，，，求和。

**【答案】**或2，；

∵，∴

解方程组，得 或

①将代入，得，

由，解得；

②将代入，得，

由，解得。

∴或2，。

**类型三：等比数列的性质**

**例3.** 等比数列中，若,求.

**解析：**

∵是等比数列，∴

∴

**举一反三：**

【变式1】正项等比数列中，若a1·a100=100; 则lga1+lga2+……+lga100=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【答案】**100；

∵lga1+lga2+lga3+……+lga100=lg(a1·a2·a3·……·a100)

而a1·a100=a2·a99=a3·a98=……=a50·a51

∴原式=lg(a1·a100)50=50lg(a1·a100)=50×lg100=100。

【变式2】在和之间插入三个数，使这五个数成等比数列，则插入的三个数的乘积为\_\_\_\_\_\_\_\_。

**【答案】**216；

**法一：**设这个等比数列为，其公比为，

∵，，∴，

∴。

**法二：**设这个等比数列为，公比为，则，，

加入的三项分别为，，，

由题意，，也成等比数列，∴，故，

∴。

**类型四：等比数列前n项和公式的性质**

**例4．**在等比数列中，已知，，求。

**思路点拨：**等差数列中也有类似的题目，我们仍然采用等差数列的解决办法，即等比数列中前k项和，第2个k项和，第3个k项和，……，第n个k项和仍然成等比数列。

**解析：**

**法一：**令b1=Sn=48, b2=S2n-Sn=60-48=12，b3=S3n-S2n

观察b1=a1+a2+……+an,

b2=an+1+an+2+……+a2n=qn(a1+a2+……+an)，

b3=a2n+1+a2n+2+……+a3n=q2n(a1+a2+……+an)

易知b1,b2,b3成等比数列，∴，

∴S3n=b3+S2n=3+60=63.

**法二：**∵，∴，

由已知得

②÷①得，即 ③

③代入①得，

∴。

**法三：**∵为等比数列，∴，，也成等比数列，

∴，

∴。

**举一反三：**

【变式1】等比数列中，公比q=2, S4=1,则S8=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【答案】**17；

S8=S4+a5+a6+a7+a8=S4+a1q4+a2q4+a3q4+a4q4=S4+q4(a1+a2+a3+a4)=S4+q4S4=S4(1+q4)=1×(1+24)=17

【变式2】已知等比数列的前n项和为Sn, 且S10=10, S20=40,求：S30=？

**【答案】**130；

**法一：**S10，S20-S10，S30-S20构成等比数列，∴(S20-S10)2=S10·(S30-S20)

即302=10(S30-40),∴S30=130.

**法二：**∵2S10≠S20，∴,

∵,,

∴∴,∴

∴ .

【变式3】等比数列的项都是正数，若Sn=80, S2n=6560，前n项中最大的一项为54，求n.

**【答案】**∵ ，∴(否则)

∴=80 ........(1)

=6560.........(2)，

(2)÷(1)得：1+qn=82,∴qn=81......(3)

∵该数列各项为正数，∴由(3)知q>1

∴{an}为递增数列，∴an为最大项54.

∴an=a1qn-1=54,∴a1qn=54q,

∴81a1=54q..........(4)

∴代入(1)得，

∴q=3,∴n=4.

【变式4】等比数列中，若a1+a2=324, a3+a4=36, 则a5+a6=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【答案】**4；

令b1=a1+a2=a1(1+q)，b2=a3+a4=a1q2(1+q),b3=a5+a6=a1q4(1+q),

易知：b1, b2, b3成等比数列，∴b3===4,即a5+a6=4.

【变式5】等比数列中，若a1+a2+a3=7,a4+a5+a6=56, 求a7+a8+a9的值。

**【答案】**448；

∵{an}是等比数列，∴(a4+a5+a6)=(a1+a2+a3)q3,∴q3=8,

∴a7+a8+a9=(a4+a5+a6)q3=56×8=448.

**类型五：等差等比数列的综合应用**

**例5．**已知三个数成等比数列，若前两项不变，第三项减去32，则成等差数列.若再将此等差数列的第二项减去4，则又成等比数列.求原来的三个数.

**思路点拨：**恰当地设元是顺利解方程组的前提.考虑到有三个数，应尽量设较少的未知数，并将其设为整式形式.

**解析：**

**法一：**设成等差数列的三数为a-d, a,a+d.

则a-d, a, a+d+32成等比数列，a-d, a-4, a+d成等比数列.

∴

由(2)得a=...........(3)

由(1)得32a=d2+32d ..........(4)

(3)代(4)消a，解得或d=8.

∴当时,；当d=8时,a=10

∴原来三个数为,,或2,10,50.

**法二：**设原来三个数为a, aq, aq2，则a, aq,aq2-32成等差数列，a, aq-4, aq2-32成等比数列

∴

由(2)得，代入(1)解得q=5或q=13

当q=5时a=2；当q=13时.

∴原来三个数为2，10，50或，,.

**总结升华：**选择适当的设法可使方程简单易解。一般地，三数成等差数列，可设此三数为a-d, a, a+d；若三数成等比数列，可设此三数为，x, xy。但还要就问题而言，这里解法二中采用首项a，公比q来解决问题反而简便。

**举一反三：**

【变式1】一个等比数列有三项，如果把第二项加上4，，那么所得的三项就成为等差数列，如果再把这个等差数列的第三项加上32，那么所得的三项又成为等比数列，求原来的等比数列.

**【答案】**为2，6，18或；

设所求的等比数列为a，aq，aq2；

则 2(aq+4)=a+aq2，且(aq+4)2=a(aq2+32)；

解得a=2，q=3或，q=-5；

故所求的等比数列为2，6，18或.

【变式2】已知三个数成等比数列，它们的积为27，它们的平方和为91，求这三个数。

**【答案】**1、3、9或―1、3、―9或9、3、1或―9、3、―1

设这三个数分别为，

由已知得

得，所以或，

即或

故所求三个数为：1、3、9或―1、3、―9或9、3、1或―9、3、―1。

【变式3】有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是16，第二个数与第三个数的和为12，求这四个数.

**【答案】**0，4，8，16或15，9，3，1；

设四个数分别是x,y,12-y,16-x

∴

由(1)得x=3y-12，代入(2)得144-24y+y2=y(16-3y+12)

∴144-24y+y2=-3y2+28y, ∴4y2-52y+144=0,

∴y2-13y+36=0, ∴ y=4或9，

∴ x=0或15，

∴四个数为0，4，8，16或15，9，3，1.

**类型六：等比数列的判断与证明**

**例6．**已知数列{an}的前n项和Sn满足：log5(Sn+1)=n(n∈N+),求出数列{an}的通项公式，并判断{an}是何种数列？

**思路点拨：**由数列{an}的前n项和Sn可求数列的通项公式，通过通项公式判断{an}类型.

**解析：**∵log5(Sn+1)=n,∴Sn+1=5n,∴Sn=5n-1 (n∈N+),

∴a1=S1=51-1=4,

当n≥2时，an=Sn-Sn-1=(5n-1)-(5n-1-1)=5n-5n-1=5n-1(5-1)=4×5n-1

而n=1时，4×5n-1=4×51-1=4=a1,

∴n∈N+时，an=4×5n-1

由上述通项公式，可知{an}为首项为4，公比为5的等比数列.

**举一反三：**

【变式1】已知数列{Cn}，其中Cn=2n+3n，且数列{Cn+1-pCn}为等比数列，求常数p。

**【答案】**p=2或p=3；

∵{Cn+1-pCn}是等比数列，

∴对任意n∈N且n≥2，有(Cn+1-pCn)2=(Cn+2-pCn+1)(Cn-pCn-1)

∵Cn=2n+3n,∴[(2n+1+3n+1)-p(2n+3n)]2=[(2n+2+3n+2)-p(2n+1+3n+1)]·[(2n+3n)-p(2n-1+3n-1)]

即[(2-p)·2n+(3-p)·3n]2=[(2-p)·2n+1+(3-p)·3n+1]·[(2-p)·2n-1+(3-p)·3n-1]

整理得：,解得：p=2或p=3,

显然Cn+1-pCn≠0，故p=2或p=3为所求.

【变式2】设{an}、{bn}是公比不相等的两个等比数列，Cn=an+bn,证明数列{Cn}不是等比数列**.**

**【证明】**设数列{an}、{bn}的公比分别为p, q，且p≠q

为证{Cn}不是等比数列，只需证.

∵,



∴,

又∵ p≠q, a1≠0, b1≠0,

∴即

∴数列{Cn}不是等比数列.

【变式3】判断正误：

(1){an}为等比数列a7=a3a4；

(2)若b2=ac，则a，b，c为等比数列；

(3){an}，{bn}均为等比数列，则{anbn}为等比数列；

(4){an}是公比为q的等比数列，则、仍为等比数列；

(5)若a，b，c成等比，则logma，logmb，logmc成等差.

**【答案】**

(1)错；a7=a1q6，a3a4=a1q2·a1q3=a12q5，等比数列的下标和性质要求项数相同；

(2)错；反例：02=0×0，不能说0，0，0成等比；

(3)对；{anbn}首项为a1b1，公比为q1q2；

(4)对；；

(5)错；反例：-2，-4，-8成等比，但logm(-2)无意义.

**类型七：Sn与an的关系**

**例7．**已知正项数列{an}，其前n项和Sn满足，且a1，a3，a15成等比数列，求数列{an}的通项an.

**解析：**∵， ①

∴，解之得a1=2或a1=3.

又， ②

由①-②得，即

∵an+an-1＞0，∴an-an-1=5(n≥2).

当a1=3时，a3=13，a15=73，a1，a3，a15不成等比数列

∴a1≠3；

当a1=2时，a3=12，a15=72，有a32=a1a15，

∴a1=2，∴an=5n-3.

**总结升华：**等比数列中通项与求和公式间有很大的联系，它们是，尤其注意首项与其他各项的关系.

**举一反三：**

【变式】命题1：若数列{an}的前n项和Sn=an+b(a≠1)，则数列{an}是等比数列；命题2：若数列{an}的前n项和Sn=na-n，则数列{an}既是等差数列，又是等比数列。上述两个命题中，真命题为 个.

**【答案】**0；

由命题1得，a1=a+b，当n≥2时，an=Sn-Sn-1=(a-1)·an-1.

若{an}是等比数列，则，即，

所以只有当b=-1且a≠0时，此数列才是等比数列.

由命题2得，a1=a-1，当n≥2时，an=Sn-Sn-1=a-1，

显然{an}是一个常数列，即公差为0的等差数列，

因此只有当a-1≠0，即a≠1时数列{an}才又是等比数列.