**等差数列解题方法与技巧-高中数学必修5第二章**

两个技巧

已知三个或四个数组成等差数列的一类问题，要善于设元．

(1)若奇数个数成等差数列且和为定值时，可设为…，*a*－2*d*，*a*－*d*，*a*，*a*＋*d*，*a*＋2*d*，….

(2)若偶数个数成等差数列且和为定值时，可设为…，*a*－3*d*，*a*－*d*，*a*＋*d*，*a*＋3*d*，…，其余各项再依据等差数列的定义进行对称设元．

四种方法

等差数列的判断方法

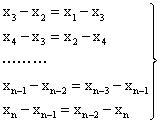
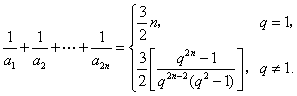
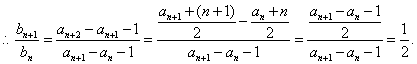
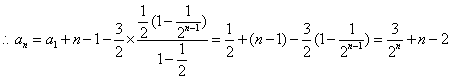
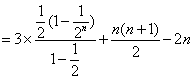
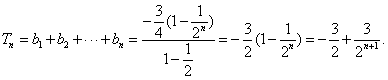
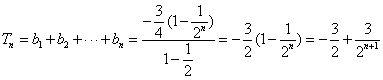
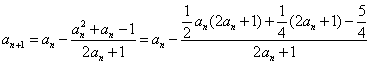
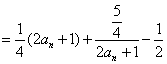
(1)定义法：对于*n*≥2的任意自然数，验证*an*－*an*－1为同一常数；

(2)等差中项法：验证2*an*－1＝*an*＋*an*－2(*n*≥3，*n*∈**N**\*)都成立；

(3)通项公式法：验证*an*＝*pn*＋*q*；

(4)前*n*项和公式法：验证*Sn*＝*An*2＋*Bn*.

注　后两种方法只能用来判断是否为等差数列，而不能用来证明等差数列．

**【例题解析】**  
**考点一：正确理解和运用数列的概念与通项公式**  
　　理解数列的概念,正确应用数列的定义，能够根据数列的前几项写出数列的通项公式.  
　　mb04_0803171．（2006年广东卷）在德国不来梅举行的第48届世乒赛期间，某商店橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品，其中第1堆只有1层，就一个球；第2，3，4，…堆最底层（第一层）分别按图所示方式固定摆放，从第二层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第n堆第n层就放一个乒乓球，  
以image008表示第n堆的乒乓球总数，则image009\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；image010\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_（答案用n表示）.  
　　　　　　　　image011　　　　 image012　　　　image013　　　　　image014……  
　　**思路启迪：**从图中观察各堆最低层的兵乓球数分别是1，3,6,10, …，推测出第n层的球数。  
　　解答过程：显然image015.  
　　第n堆最低层（第一层）的乒乓球数，image016，第n堆的乒乓球数总数相当于前n堆乒乓球的低层数之和，即image017  
　　所以：image018   
  
　　mb04_0803172．（2007年湖南卷理）将杨辉三角中的奇数换成1，偶数换成0，得到如图所示的0-1三角数表．从上往下数，第1次全行的数都为1的是第1行，第2次全行的数都为1的是第3行，…，第image019次全行的数都为1的是第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_行；第61行中1的个数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．  
　　第1行 　　　　1 1  
　　第2行　　　　1 0 1  
　　第3行　　　 1 1 1 1  
　　第4行　　　1 0 0 0 1  
　　第5行 　　1 1 0 0 1 1  
　　…… …………………………………  
　　**思路启迪：**计算图形中相应1的数量的特征，然后寻找它们之间的规律。  
　　**解：**第1次全行的数都为1的是第image020=1行，  
　　　　第2次全行的数都为1的是第image021=3行，  
　　　　第3次全行的数都为1的是第image022=7行，  
　　　　······，  
　　　　第image019次全行的数都为1的是第image023行；  
　　　　第61行中1的个数是25=32．  
  
**考点二：数列的递推关系式的理解与应用**  
　　在解答给出的递推关系式的数列问题时，要对其关系式进行适当的变形 ，转化为常见的类型进行解题。  
　　如叠加法：若image025且image026；我们可把各个关系式列出来进行叠加求和，可得到数列image027的通项.   
　　image026，image028，image029，…，image025  
　　∴image030  
　　再看叠乘法：image031且image026，可把各个商列出来求积。  
　　image032  
　　另外可以变形转化为等差数列与等比数列，利用等差数列与等比数列的性质解决问题。  
　　mb04_0803173．（2007年北京卷理）数列image033中，image034，image035（image036是常数，image037），  
且image038成公比不为image039的等比数列．  
　　（I）求image036的值；（II）求image033的通项公式．  
　　**思路启迪：**（1）由image038成公比不为image039的等比数列列方程求image036；  
　　（2）可根据递推公式写出数列的前几项，然后分析每一项与该项的序号之间的关系，归纳概括出image001与n之间的一般规律，从而作出猜想，写出满足前4项的该数列的一个通项公式.  
　　**解：**（I）image034，image040，image041，  
　　　 　因为image038成等比数列，所以image042，解得image043或image044．  
　　　　 当image043时，image045，不符合题意舍去，故image044．  
　　（II）当image046时，由于  
　　　　　image047，image048， image049，image050，  
　　　　　所以image051．  
　　　　　又image034，image044，故image052．  
　　　　　当image053时，上式也成立，  
　　　　　所以image054．  
　　**小结：**从特殊的事例，通过分析、归纳、抽象总结出一般规律，再进行科学地证明，这是创新意识的具体体现，这种探索问题的方法，在解数列的有关问题中经常用到，应引起足够的重视.  
  
　　mb04_0803174．数列image055满足image056，image057，image058…．若image059，则image060( )  
　　　　　（Ａ）image061 　　　（Ｂ） ３ 　　（Ｃ） ４ 　　（Ｄ） ５  
　　**思路启迪：**对递推关系变形，运用叠加法求得，特别注意的是对两边同时运用.  
　　**解答过程1：**image062，image063.  
　　　　相叠加得image065.  
　　　　image066， image067.  
　　　　image068，image069，image070 ，image071.  
　　**解答过程2：**  
　　　　由image057得：  
　　　　image072，  
　　　　image073，因为image069，所以image071.  
　　**解答过程3：**由image057得：  
　　　　image074image075  
　　　　从而image076；image077；…；image078.  
　　　　叠加得：image079.  
　　　　image080，image081  
　　　　image082， 从而image071.  
　　**小结：**数列递推关系是近几年高考数学的热点，主要是一些能转化为等差等比数列的递推关系式。  
　　对连续两项递推image083，可转化为image084；  
　　对连续三项递推的关系image085，如果方程image086有两个根image087，则上递推关系式可化为image088或image089.  
  
**考点三：数列的通项image090与前n项和image091之间的关系与应用**  
　　image090与image091的关系：image092，数列前n项和image091和通项image090是数列中两个重要的量，在运用它们的关系式image093时，一定要注意条件image094，求通项时一定要验证image095是否适合。解决含image090与image091的式子问题时，通常转化为只含image090或者转化为只image091的式子.  
　　mb04_0803175．（2006年辽宁卷） 在等比数列image033中,image034 ,前image019项和为image002,若数列image096也是等比数列,则image002等于（ ）  
　　　　(A)image097　　　 (B) image098　　　　(C)image099　　　　 (D)image100   
　　**命题目的：**本题考查了等比数列的定义和求和公式，着重考查了运算能力。  
　　**过程指引：**因数列image033为等比，则image101，因数列image096也是等比数列，则  
　　　　image102  
　　　　即image103，所以image104，故选择答案C.  
  
　　mb04_0803176.已知在正项数列image033中，image002表示前n项和，且image105，求image001.  
　　**思路启迪：**转化为只含image001或者只含image002的递推关系式.  
　　**解答过程1：**由已知image105，得当image053时，image026；  
　　　　当image106时，image107，代入已知有image108，即  
　　　　image109.image110，  
　　　　又image111，故image112.image113  
　　　　∴数列image114是首项为image026，公差image115的等差数列，image116  
　　　　故image117.  
　　**解答过程2：**由已知image105，得当n=1时，image026；  
　　　　当image106时，因为image118，所以image119.  
　　　　image120，image121   
　　　　image122，因为image123，  
　　　　所以image124，所以image125.  
  
**考点四：数列中与n有关的等式的理解与应用**  
　　对数列中的含n的式子，注意可以把式子中的n换为image126得到另外的式子。也可以把n取自然数中的具体的数1，2，3…等，得到一些等式归纳证明.  
　　mb04_0803177．（2006年福建卷）已知数列image127满足image128(image129)  
　　（Ⅰ）求数列image127的通项公式；  
　　（Ⅱ）若数列image130满足image131(image129),证明:image130是等差数列;  
　　**思路启迪：**本小题主要考查数列基本知识，考查化归的数学思想方法，考查综合解题能力。把递推关系式变形转化。  
　　**解答过程：**   
　　（I）解：∵image132 ，∴image133  
　　　　　　 image134是以image135为首项，2为公比的等比数列。  
　　　　　　 ∴image136 即image137　（image129）  
　　 （II）证法一：∵image131，  
　　　　　 ∴image138即image139  
　　　　　 ∴image140　　　　　　　　①  
　　 　　　image141　　　②  
　　　　　 ②－①，得image142，即image143 　③  
　　　　　 image144④  
　　　　　 ③－④，得　image145 ， 即image146  
　　　　　 故image130是等差数列.  
  
**考点五：等差、等比数列的概念与性质的理解与应用**  
　　在等差、等比数列中，已知五个元素image147或image148，image149中的任意三个，运用方程的思想，便可求出其余两个，即“知三求二”。本着化多为少的原则，解题时需抓住首项image150和公差（或公比image148）。另外注意等差、等比数列的性质的运用.例如  
　　（1）等差数列image033中，若image151，则image152；  
　　　　 等比数列image127中，若image151，则image153 .   
　　（2）等差数列image033的前n项为image091，则image154成等差数列，且公差  
为image155；  
　　　　 等比数列image033中（image156）的前n项和为image091，则image157成等比数列，且公比image158.  
　　（3）在等差数列image033中，项数n成等差的项image159也成等差数列.   
　　（4）在等差数列image033中，image160；image161 .  
　　在复习时，要注意深刻理解等差数列与等比数列的定义及其等价形式.注意方程思想、整体思想、分类讨论思想、数形结合思想的运用.  
　　mb04_0803178．（2006年江西卷）已知等差数列image033的前n项和为image091，若image162，且A、B、C三点共线（该直线不过原点O），则image163＝（ ）  
　　　　A．100　　　　 B. 101 　　　　C.200　　　　 D.201  
　　**命题目的：**考查向量性质、等差数列的性质与前n项和。  
　　**过程指引：**依题意，image164，故选A  
  
　　mb04_0803179．（2007年安徽卷文、理）  
　　某国采用养老储备金制度，公民在就业的第一年就交纳养老储备金，数目为a1，以后每年交纳的数目均比上一年增加 image165, 因此，历年所交纳的储备金数目image166, image167， … 是一个公差为 image004的等差数列. 与此同时，国家给予优惠的计息政府，不仅采用固定利率，而且计算复利. 这就是说，如果固定年利率  
为image168（image169）,那么, 在第image019年末，第一年所交纳的储备金就变为image170，第二年所交纳的储备金就变成image171，……. 以image172表示到第image019年末所累计的储备金总额.  
　　（Ⅰ）写出image172与image173（image106）的递推关系式；  
　　（Ⅱ）求证image174，其中{image175}是一个等比数列，{image176}是一个等差数列.  
　　**命题目的：**本小题主要考查等差数列、等比数列的基本概念和基本方法，考查学生阅读资料、提取信息、建立数字模型的能力，考查应用所学知识分析和解决实际问题的能力.  
　　**解：**（I）我们有image177  
　　（II）image178，对image106反复使用上述关系式，得  
　　　　　image179  
　　　　　　 =…=image180 ①  
　　　　　在①式两端同乘1+r，得  
　　　　　image181 ②  
　　　　　②－①，得image182  
　　　　　　　　　　　　image183  
　 　　　 即image184  
　　　　　记image185，image186，则  
　　　　　image187，其中{image188}是等比数列，且首项为image189，公比为image190；image191是等差数列，且首项为image192，公比为image193.  
　　**点评：**解综合题要总揽全局，尤其要注意上一问的结论可作为下面论证的已知条件，在后面求解的过程中适时应用．  
  
**考点六：等差、等比数列前n项和的理解与应用**  
　　等差、等比数列的前n项和公式要深刻理解。等差数列的前n项和公式是关于n的二次函数；等比数列的前n项和公式image194（image195），因此可以改写为image196是关于n的指数函数，当image197时，image198.  
　　mb04_08031710．（2007年广东卷理）已知数列image033的前n项和image199,第k项满足image200,则k=（）  
　　　　　　　A．9 　　　B．8 　　　　C．7　　　　 D．6  
　　**思路启迪：**本小题主要考查数列通项和等差数列等基本知识，考查逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力．  
　　**解：**此数列为等差数列，image201，由5<2k-10<8得到k=8．  
  
　　mb04_08031711．（2007年湖北卷文）已知数列image033和image202满足:image203  
且image202是以q为公比的等比数列.  
　　 （Ⅰ）证明：image204；  
　　 （Ⅱ）若image205证明数列image206是等比数列；  
　　 （Ⅲ）求和：image207.  
　　**命题目的：**本小题主要考查等比数列的定义，通项公式和求和公式等基本知识及基本的运算技能，考查分析问题能力和推理能力．  
　　**解法1：**  
　　（I）证：由image208，有image209，image210image211．  
　　（II）证：image212，image213，image214，  
　　　　　　　image215．  
　　　　　　　∴image206是首项为5，以image216为公比的等比数列．  
　　（III）由（II）得image217，image218，于是  
　　　　　image219  
　　　　　　　　　　　　　image220  
　　　　　　　　　　　　　image221．  
　　　　　当image006时，image222．  
　　　　　当image007时，image223．  
　　　　　故  
　　**解法2：**  
　　（I）同解法1（I）．  
　　（II）证：image225，又image226，  
　　　　　image227是首项为5，以image216为公比的等比数列．  
　　（III）由（II）的类似方法得image228，  
　　　　　 image229，  
　　　　　 image230，image231．  
　　　　　 image232．下同解法1．  
  
**考点七：数列与函数的迭代问题**  
　　由函数迭代的数列问题是近几年高考综合解答题的热点题目，此类问题将函数与数列知识综合起来，考察函数的性质以及函数问题的研究方法在数列中的应用，涉及的知识点由函数性质、不等式、数列、导数、解析几何的曲线等，另外函数迭代又有极为深刻的理论背景和实际背景，它与当前国际数学主流之一的动力系统（拓扑动力系统、微分动力系统）密切相关，数学家们极为推崇，函数迭代一直出现在各类数学竞赛试题中，近几年又频频出现在高考数学试题中.  
　　mb04_08031712．（2006年山东卷）已知数列image033中，image233，点image234在直线y=x上，  
　　　　　　　　　　　　　　 其中n=1,2,3….  
　　(Ⅰ)令image235，求证image236是等比数列；  
　　(Ⅱ)求数列image033的通项；  
　　(III)设image002、image237分别为数列image033、image236的前n项和,是否存在实数image238，使得数列image239为等差数列？若存在，试求出image238.若不存在,则说明理由.  
　　**思路启迪：**利用等比的定义证明image236是等比数列；对image033可由已知用叠加法求出求。求出image001与image240便可顺利求出第三问.  
　　**解答过程：**  
　　（I）由已知得image241   
　　　　　image242  
　　　　　又image243，image244   
　　　　　  
　　　　　image246是以image247为首项，以image248为公比的等比数列.  
　　（II）由（I）知，image249 image250  
　　　　　image251，image252，…，image253  
　　　　　将以上各式相加得：image254   
　　　　　  
　　　　　image256  
　　（III）解法一：  
　　　　　 存在image257，使数列image239是等差数列.  
　　　　 　image258  
　　　　 　image260  
　　　 　　  
　　　　 　数列image239是等差数列的充要条件是image262 （image263、image264是常数image265  
　　　　 　即image266  
　　　　　 又image267.  
　　　　 　image268当且仅当image269，即image270时，数列image239为等差数列.  
　　解法二：存在image271，使数列image239是等差数列.  
　　　　　　由（I）、（II）知，image272，image273.  
　　　　　　∴image274.  
　　　　　　又.  
　　　　　　∴image276.  
　　　　　　image268当且仅当image277时，数列image239是等差数列.  
  
　　mb04_08031713（2007年陕西卷理） 已知各项全不为零的数列image278的前k项和为image279，  
　　　　　　　　　　　　　　　且image280（image281），其中image282  
　　 （Ⅰ）求数列image278的通项公式；  
　　 （II）对任意给定的正整数image019 image283，数列image284满足image285image286.  
　　　　　 求image287.  
　　**思路启迪：**注意利用image288解决问题．  
　**解：**（Ⅰ）当image289，由image290及image026，得image291．  
　　　　　当image292时，由image293，得image294．  
　　　　　因为image295，所以image296．从而image297  
　　　　　image298，image299．故image300．  
　　（Ⅱ）因为image301，所以image302．  
　　　　　所以image303  
　　　　　　　　image304  
　　　　　故image305image306  
　　　　　　　　　　　　　　　image307  
  
**考点八：数列综合应用与创新问题**  
　　数列与其它数学知识的综合性问题是高考的热点，全面考察数学知识的掌握和运用的情况，以及分析问题解决问题的能力和思维的灵活性、深刻性、技巧性等，涉及的数学思想方法又从一般到特殊和从特殊到一般的思想、函数与方程的思想、探索性思想等。  
　　mb04_08031714．（2006年湖南卷）在image308（image309）个不同数的排列image310中，若image311时image312（即前面某数大于后面某数），则称image313与image314构成一个逆序. 一个排列的全部逆序的总数称为该排列的逆序数. 记排列image315的逆序数为image001，如排列21的逆序数image026，排列321的逆序数image316.  
则image317=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，image318=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，image001的表达式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；  
　　**命题目的：**考查排列、数列知识.  
　　**过程导引：**由已知得image319，image320，image321.  
  
　　mb04_08031715．设image322是定义在image323上的单调可导函数.已知对于任意正数image324，  
　　　　　　 都有image325，且image326.  
　　（Ⅰ）求image327，并求image328的值；  
　　（Ⅱ）令image329，证明数列image033是等差数列；  
　　（Ⅲ）设image330是曲线image331在点image332处的切线的斜率（image333），  
　　　　　数列image334的前image019项和为image002，  
　　求证：image335.  
　　**思路启迪：**根据已知条件求出函数image336的关系式，求出image337的递推关系式然后可求解题中要求．  
　　**解答过程：**（Ⅰ）取image338，image339；  
　　　　　再取image340，则image341，即image342，  
　　　　　∵image322是定义在image323上的单调函数  
　　　　　∴image343，解得image344，或image345（舍去）.  
　　（Ⅱ）设image346，则image347，  
　　　　　再令image348，则image349，即image350  
　　　　　∵image322是定义在image323上的单调函数  
　　　　　∴image351，即image352，解得：image353或image354，  
　　　　　又image326，则image355，image356，  
　　　　　由image357，所以image033是等差数列.   
　　（3）由（2）得image358，image359，则image360  
　　　 　所以image361；  
　　　 　又当image106时，image362，  
　　　　 则image363，  
　　　 　故image335.   
  
　　mb04_08031716．（2007年广东卷理）已知函数image364，image365是方程image366的两个根image367，  
image368是image322的导数；设image026，image369（n=1,2,……）  
　　（1）求image365的值；  
　　（2）证明：对任意的正整数n，都有image370；  
　　（3）记image371（n=1,2,……），求数列{image372}的前n项和image002．  
　　**思路启迪：**（1）注意应用根与系数关系求image365的值；  
　　　　　　　 （2）注意先求image368；  
　　　　　　　 （3）注意利用image365的关系．  
　　**解：**  
　　（1）∵image364，image365是方程image366的两个根image367，  
　　　 　∴image373，image374．  
　　（2）image375，   
　　　　 ，∵image026，  
　　　 　∴由基本不等式可知image378（当且仅当image379时取等号），∴image380  
　　　　 同样image381，…，image382（n=1,2,……）．  
　　（3）image383，  
　　　 　而image384，即image385， image386，  
　　　 　同理image387，image388，  
　　　 　又image389，  
　　　 　image390.