**等差数列考点-高中数学必修5第二章**

考向一　等差数列基本量的计算

【例1】►(2011·福建)在等差数列{*an*}中，*a*1＝1，*a*3＝－3.

(1)求数列{*an*}的通项公式；

(2)若数列{*an*}的前*k*项和*Sk*＝－35，求*k*的值．

[审题视点] 第(1)问，求公差*d*；

第(2)问，由(1)求*Sn*，列方程可求*k*.

解　(1)设等差数列{*an*}的公差为*d*，则*an*＝*a*1＋(*n*－1)*d*.

由*a*1＝1，*a*3＝－3可得1＋2*d*＝－3.

解得*d*＝－2.从而，*an*＝1＋(*n*－1)×(－2)＝3－2*n*.

(2)由(1)可知*an*＝3－2*n*.

所以*Sn*＝＝2*n*－*n*2.

进而由*Sk*＝－35可得2*k*－*k*2＝－35.

即*k*2－2*k*－35＝0，解得*k*＝7或*k*＝－5.

又*k*∈**N**\*，故*k*＝7为所求．

 等差数列的通项公式及前*n*项和公式中，共涉及五个量，知三可求二，如果已知两个条件，就可以列出方程组解之．如果利用等差数列的性质、几何意义去考虑也可以．体现了用方程思想解决问题的方法．

【训练1】 (2011·湖北)《九章算术》“竹九节”问题：现有一根9节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面4节的容积共3升，下面3节的容积共4升，则第5节的容积为\_\_\_\_\_\_\_\_升．

解析　设竹子从上到下的容积依次为*a*1，*a*2，…，*a*9，由题意可得*a*1＋*a*2＋*a*3＋*a*4＝3，*a*7＋*a*8＋*a*9＝4，设等差数列{*an*}的公差为*d*，则有4*a*1＋6*d*＝3①，3*a*1＋21*d*＝4②，由①②可得*d*＝，*a*1＝，所以*a*5＝*a*1＋4*d*＝＋4×＝.

答案

考向二　等差数列的判定或证明

【例2】►已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*且满足*an*＋2*Sn*·*Sn*－1＝0(*n*≥2)，*a*1＝.

(1)求证：是等差数列；

(2)求*an*的表达式．

[审题视点] (1)化简所给式子，然后利用定义证明．

(2)根据*Sn*与*an*之间关系求*an*.

(1)证明　∵*an*＝*Sn*－*Sn*－1(*n*≥2)，又*an*＝－2*Sn*·*Sn*－1，

∴*Sn*－1－*Sn*＝2*Sn*·*Sn*－1，*Sn*≠0，∴－＝2(*n*≥2)．

由等差数列的定义知是以＝＝2为首项，以2为公差的等差数列．

(2)解　由(1)知＝＋(*n*－1)*d*＝2＋(*n*－1)×2＝2*n*，

∴*Sn*＝.当*n*≥2时，有*an*＝－2*Sn*×*Sn*－1＝－，

又∵*a*1＝，不适合上式，∴*an*＝

 等差数列主要的判定方法是定义法和等差中项法，而对于通项公式法和前*n*项和公式法主要适合在选择题中简单判断．

【训练2】 已知数列{*an*}的前*n*项和*Sn*是*n*的二次函数，且*a*1＝－2，*a*2＝2，*S*3＝6.

(1)求*Sn*；

(2)证明：数列{*an*}是等差数列．

(1)解　设*Sn*＝*An*2＋*Bn*＋*C*(*A*≠0)，则

解得：*A*＝2，*B*＝－4，*C*＝0.

∴*Sn*＝2*n*2－4*n*.

(2)证明　当*n*＝1时，*a*1＝*S*1＝－2.

当*n*≥2时，*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝2*n*2－4*n*－[2(*n*－1)2－4(*n*－1)]

＝4*n*－6.

∴*an*＝4*n*－6(*n*∈**N**\*)．

当*n*＝1时符合上式，故*an*＝4*n*－6，

∴*an*＋1－*an*＝4，

∴数列{*an*}成等差数列．

考向三　等差数列前*n*项和的最值

【例3】►设等差数列{*an*}满足*a*3＝5，*a*10＝－9.

(1)求{*an*}的通项公式；

(2)求{*an*}的前*n*项和*Sn*及使得*Sn*最大的序号*n*的值．

[审题视点] 第(1)问：列方程组求*a*1与*d*；

第(2)问：由(1)写出前*n*项和公式，利用函数思想解决．

解　(1)由*an*＝*a*1＋(*n*－1)*d*及*a*3＝5，*a*10＝－9得

可解得

数列{*an*}的通项公式为*an*＝11－2*n*.

(2)由(1)知，*Sn*＝*na*1＋*d*＝10*n*－*n*2.

因为*Sn*＝－(*n*－5)2＋25，所以当*n*＝5时，*Sn*取得最大值．

 求等差数列前*n*项和的最值，常用的方法：

(1)利用等差数列的单调性或性质，求出其正负转折项，便可求得和的最值．

(2)利用等差数列的前*n*项和*Sn*＝*An*2＋*Bn*(*A*、*B*为常数)为二次函数，根据二次函数的性质求最值．

【训练3】 在等差数列{*an*}中，已知*a*1＝20，前*n*项和为*Sn*，且*S*10＝*S*15，求当*n*取何值时，*Sn*取得最大值，并求出它的最大值．

解　法一　∵*a*1＝20，*S*10＝*S*15，

∴10×20＋*d*＝15×20＋*d*，

∴*d*＝－.

∴*an*＝20＋(*n*－1)×＝－*n*＋.

∴*a*13＝0.即当*n*≤12时，*an*＞0，*n*≥14时，*an*＜0.

∴当*n*＝12或13时，*Sn*取得最大值，且最大值为*S*12＝*S*13＝12×20＋×＝130.

法二　同法一求得*d*＝－.

∴*Sn*＝20*n*＋·

＝－*n*2＋*n*

＝－2＋.

∵*n*∈**N**\*，

∴当*n*＝12或13时，*Sn*有最大值，

且最大值为*S*12＝*S*13＝130.

法三　同法一得*d*＝－.

又由*S*10＝*S*15，得*a*11＋*a*12＋*a*13＋*a*14＋*a*15＝0.

∴5*a*13＝0，即*a*13＝0.

∴当*n*＝12或13时，*Sn*有最大值，

且最大值为*S*12＝*S*13＝130.

考向四　等差数列性质的应用

【例4】►设等差数列的前*n*项和为*Sn*，已知前6项和为36，*Sn*＝324，最后6项的和为180(*n*＞6)，求数列的项数*n*.

[审题视点] 在等差数列 {*an*}中，若*m*＋*n*＝*p*＋*q*，则*am*＋*an*＝*ap*＋*aq*(*m*，*n*，*p*，*q*∈**N**\*)用此性质可优化解题过程．

解　由题意可知*a*1＋*a*2＋…＋*a*6＝36①

*an*＋*an*－1＋*an*－2＋…＋*an*－5＝180②

①＋②得

(*a*1＋*an*)＋(*a*2＋*an*－1)＋…＋(*a*6＋*an*－5)＝6(*a*1＋*an*)＝216.

∴*a*1＋*an*＝36.又*Sn*＝＝324，

∴18*n*＝324.

∴*n*＝18.

 本题的解题关键是将性质*m*＋*n*＝*p*＋*q*⇒*am*＋*an*＝*ap*＋*aq*与前*n*项和公式*Sn*＝结合在一起，采用整体思想，简化解题过程．

【训练4】 (1)设数列{*an*}的首项*a*1＝－7，且满足*an*＋1＝*an*＋2(*n*∈**N**＋)，则*a*1＋*a*2＋…＋*a*17＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

(2)等差数列{*an*}中，*a*1＋*a*2＋*a*3＝－24，*a*18＋*a*19＋*a*20＝78，则此数列前20项和等于\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析　(1)∵*an*＋1－*an*＝2，∴{*an*}为等差数列．

∴*an*＝－7＋(*n*－1)·2，∴*a*17＝－7＋16×2＝25，

*S*17＝＝＝153.

(2)由已知可得(*a*1＋*a*2＋*a*3)＋(*a*18＋*a*19＋*a*20)＝－24＋78⇒(*a*1＋*a*20)＋(*a*2＋*a*19)＋(*a*3＋*a*18)＝54⇒*a*1＋*a*20＝18⇒*S*20＝×20＝×20＝180.

答案　(1)153　(2)180

【问题诊断】 在数列问题中，数列的通项*an*与其前*n*项和*Sn*之间存在下列关系：*an*＝这个关系对任意数列都是成立的，但要注意的是这个关系式是分段的，在*n*＝1和*n*≥2时这个关系式具有完全不同的表现形式，这也是解题中经常出错的一个地方，在使用这个关系式时要牢牢记住其“分段”的特点．

【防范措施】 由*an*＝*Sn*－*Sn*－1求出*an*后，一定不要忘记验证*n*＝1是否适合*an*.

【示例】►(2009·安徽改编)已知数列{*an*}的前*n*项和*Sn*＝2*n*2＋2*n*，数列{*bn*}的前*n*项和*Tn*＝2－*bn*.求数列{*an*}与{*bn*}的通项公式．

错因　求*an*、*bn*时均未验证*n*＝1.实录　∵*an*＝*Sn*－*Sn*－1，

∴*an*＝2*n*2＋2*n*－2(*n*－1)2－2(*n*－1)＝4*n*.

又*Tn*＝2－*bn*，

∴*bn*＝*Tn*－*Tn*－1＝2－*bn*－2＋*bn*－1，

即*bn*＝*bn*－1，∴*bn*＝*n*－1＝21－*n*.

正解　当*n*≥2时，*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝2*n*2＋2*n*－2(*n*－1)2－2(*n*－1)＝4*n*，

又*a*1＝*S*1＝4，故*an*＝4*n*，

当*n*≥2时，由*bn*＝*Tn*－*Tn*－1＝2－*bn*－2＋*bn*－1，

得*bn*＝*bn*－1，

又*T*1＝2－*b*1，∴*b*1＝1，

∴*bn*＝*n*－1＝21－*n*.

【试一试】 已知在正整数数列{*an*}中，前*n*项和*Sn*满足：

*Sn*＝(*an*＋2)2.

(1)求证：{*an*}为等差数列．

(2)若*bn*＝*an*－30.求数列{*bn*}的前*n*项和的最小值．

[尝试解答]　(1)证明：当*n*＝1时，*S*1＝*a*1＝(*a*1＋2)2，

∴(*a*1－2)2＝0，∴*a*1＝2.

当*n*≥2时，*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝(*an*＋2)2－(*an*－1＋2)2，

∴*an*－*an*－1＝4，

∴{*an*}为等差数列．

(2)由(1)知：*an*＝*a*1＋(*n*－1)4＝4*n*－2，

由*bn*＝*an*－30＝2*n*－31≤0得*n*≤.

∴{*bn*}的前15项之和最小，且最小值为－225.