**等差数列难题-高中数学必修5第二章**

**类型一：直接利用等差数列的定义、公式求解**

**例1**.（1）求等差数列3，7，11，……的第11项.

（2）100是不是等差数列2，9，16，……的项？如果是，是第几项？如果不是，说明理由.

**思路点拨:**（1）根据所给数列的前2项求得首项和公差，写出该数列的通项公式，从而求出所求项；（2）题中要想判断一数是否为某一数列的其中一项，关键是要看是否存在一正整数值，使得等于这一数.

**解析：**

（1）根据题意可知：,.

∴该数列的通项公式为：（,）

∴.

（2）根据题意可得：,.

∴此数列通项公式为：（,）.

令,解得：,

∴100是这个数列的第15项.

**总结升华：**

1.根据所给数列的前2项求得首项和公差，写出通项公式.

2.要注意解题步骤的规范性与准确性.

**举一反三：**

【变式1】求等差数列8，5，2…的第21项

**【答案】**由，，∴.

【变式2】－20是不是等差数列0，，－7，……的项？如果是，是第几项？如果不是，说明理由.

**【答案】**由题意可知：,，∴此数列的通项公式为：,

令,解得，所以－20不是这个数列的项.

【变式3】求集合的元素的个数，并求这些元素的和

**【答案】**∵， ∴， ∵，∴中有14个元素符合条件，

又∵满足条件的数7，14，21，…，98成等差数列，即，，，

∴.

**类型二：根据公式列方程（组）求解**

**例2．**已知等差数列中，，，试问217是否为此数列的项？若是，说明是第几项？若不是，说明理由。

**思路点拨:**由于在条件中已知两项的值（两个等式），所以在求解方法上，可以考虑运用方程思想求解基本量首项和公差，也可以利用性质求，再就是考虑运用等差数列的几何意义。

**解析：**

方法一：由通项公式得：，解得，

∴（,）,

∴,解得.

方法二：由等差数列性质，得,即，解得,

∴， ∴,解得.

方法三：由等差数列的几何意义可知，等差数列是一些共线的点，

∵点、、在同一条直线上，

∴ ，解得。

**总结升华：**

1. 等差数列的关键是首项与公差；五个基本量、、、、中，已知三个基本量便可求出其余两个量；

2.列方程（组）求等差数列的首项和公差，再求出、，是数列中的基本方法.

**举一反三：**

【变式1】等差数列-10，-6，-2，2，…前多少项的和是54？

**【答案】**设题中的等差数列为，前n项为，则，，，

由公式可得，解之得：，（舍去）

∴等差数列-10，-6，-2，2…前9项的和是54。

【变式2】等差数列中, , , ,求的值.

**【答案】**即，

解得：或.

【变式3】已知等差数列，，，则= 。

**【答案】**

方法一：设数列首项为,公差为，则

， 解得，

∴。

方法二：∵, ∴，解得：，

∴.

方法三：∵为等差数列，∴,,,，…，也成新的等差数列，

由，知上述新数列首项为，公差为-2

∴ .

**类型三：等差数列的判断与证明**

**例3.**已知数列的前n项和为，求证：数列为等差数列.

**思路点拨:**由等差数列的定义，要判定是不是等差数列，只要看（）是不是一个与无关的常数。

**解析：**当时

当时，，

∴（）

又∵（为与无关常数）

∴数列为等差数列

**总结升华：**

1. 定义法和等差中项法是证明等差数列的常用方法.

2. 一般地，如果一个数列的前项和为，其中、、为常数，且，那么当常数项时，这个数列一定是等差数列；当常数项时，这个数列不是等差数列，但从第二项开始的新数列是等差数列.

**举一反三：**

【变式1】已知数列的通项公式，其中、是常数，那么这个数列是否一定是等差数列？若是，首项与公差分别是什么？

**【答案】**当时, （为常数）

∴是等差数列，首项，公差为.

【变式2】已知数列中，，（），求证：是等差数列。

**证明：**∵，∴

∴，∴是公差为的等差数列。

**类型四：利用等差数列的性质**

**例4.** 已知等差数列中，若,,求的通项公式。

**思路点拨:**可以直接列方程组求解和；同时留意到脚标，可以用性质：当时解题.

**解析：**∵，∴即,

代入已知，有,解得或，

当,时，，∴；

当,时，, ∴.

**总结升华：**利用等差数列的性质解题，往往比较简捷.

**举一反三：**

【变式1】在等差数列中，，则=

**【答案】**9

【变式2】在等差数列中，，则=

**【答案】**10

【变式3】在等差数列中，若,, 则= , =

**【答案】**∵，，∴，

∴，∴.

**例5．**等差数列前m项和为30，前2m项和为100，求它的前3m项和.

**思路点拨:**利用等差数列的前n项和公式求解；或利用性质：“等差数列的连续10项和构成一个新的等差数列”和等差中项求解；或利用相关的函数（）等知识求解。

**解析：**

**方法一：**利用等差数列的前n项和公式求解。

由已知得，解得，

∴。

**方法二：**利用等差数列前n项和公式及性质,则求解。

由已知得

由(3)-(2)及(2)-(1)结合(4), 得S3m=210.

**方法三：**根据性质：“已知{an}成等差数列，则Sn,S2n-Sn, S3n-S2n,……,Skn-S(k-1)n,……(k≥2)成等差数列”解题。

由上述性质，知Sm,S2m-Sm,S3m-S2m成等差数列。

∴Sm+(S3m-S2m)=2(S2m-Sm), ∴ S3m=3(S2m-Sm)=210.

**方法四：**由的变形式解题，由上式知，

∴数列也成等差数列，即成等差数列，

∵ ，又Sm=30, S2m=100, ∴S3m=210.

**方法五：**∵{an}为等差数列， ∴设

∴Sm=am2+bm=30,S2m=4m2a+2mb=100, 得，

∴S3m=9m2a+3mb=210.

**举一反三：**

【变式1】等差数列{an}中，若a1+a2+a3+a4+a5=30, a6+a7+a8+a9+a10=80, 则a11+a12+a13+a14+a15=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【答案】**比较对应项可知后一段中每一项总比前段每一项多5d，故后一段和比前一段和多25d，故三段依然构成等差数列，故由等差中项公式可知:a11+a12+a13+a14+a15=2×80-30=130.

【变式2】等差数列{an}中，Sm=Sn且m≠n, 则Sm+n=\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【答案】**

**方法一：**数列{an}成等差数列的充要条件是Sn=an2+bn（其中a，b为常数），

故有

(2)-(1)得a(m2-n2)+b(m-n)=0,

∵m≠n, ∴a(m+n)+b=0,

∴Sm+n=a(m+n)2+b(m+n)=(m+n)[a(m+n)+b]=0.

**方法二:**

从等差数列Sn=an2+bn去认识它是函数S(x)=ax2+bx图象上的点，

∵Sm=Sn,∴函数图象对称轴为，

故Sm+n=S(0)=a·02＋b·0=0.

【变式3】等差数列前10项和为100，前20项和为10，求它的前30项和.

**【答案】**

**方法一：**

由已知，得，解得，，

∴.

**方法二：**

等差数列中,,，…构成新的等差数列，

∴, ∴.

**方法三：**等差数列中，设,则

,解得，

∴.

**例6．**已知两等差数列、的前项和分别为、，且，试求.

**思路点拨:**利用前项和公式与性质解题，或利用解决，或利用等差数列前项和形式解题.

**解析：**

**方法一：**∵，

∴ .

**方法二：**由得

**方法三：**由题设，令等差数列前项和, ，则

，，

∴.

**总结升华：**依据等差数列的性质可以得到，当已知两等差数列、的前项和分别为、时，有，.

**举一反三：**

【变式1】等差数列中，若, 则=\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【答案】**由，得.

【变式2】已知两等差数列、的前项和分别为、，且，则= .

**【答案】**.

**例7．**已知三个数成等差数列，其和为15，其平方和为83，求此三个数。

**解析：**设这三个数分别为, , ，则

，解得,.

∴所求三个数分别为3，5，7或7，5，3。

**总结升华：**

1. 三个数成等差数列时，可设其分别为, , ；若四个数成等差数列，可设其分别为,,,.

2．注意：3，5，7与7，5，3是两个不同的等差数列，因此都满足题目要求，不能舍掉其中一个的。

**举一反三：**

【变式】已知四个数成等差数列，且其平方和为94，首尾两数之积比中间两数之积少18，求此四个数。

**【答案】**-1，2，5，8或8，5，2，-1或-8，-5，-2，1或1，-2，-5，-8

**类型五：等差数列前****项和的最值问题**

**例8．**已知数列是等差数列，,，试问为何值时，数列的前项和最大？为什么？

**思路点拨:**：要研究一个等差数列的前项和的最值问题，有两个基本途径：其一是利用是的二次函数关系来考虑；其二是通过考察数列的单调性来解决。

**解析：**

**方法一：**∵, ∴即,

∵， ∴，

又，

∵，∴ 当, 有最大值为.

**方法二：**要使最大，必须使且，

即

解得， ∵，

∴时，最大为.

**总结升华：**

对等差数列前项和的最值问题有两种方法:

1. 利用:

当，时，前项和有最大值。可由，且，求得的值；

当，时，前项和有最小值。可由，且，求得的值.

1. 利用：由利用二次函数配方法求得最值时的值

**举一反三：**

【变式】设等差数列的前项和为, 已知,,.

（1）求公差的取值范围；

（2）指出，，…，中哪一个值最大，并说明理由.

**【答案】**

（1）依题意，有，即，

解得.

（2）法一:由，可知.

设存在自然数,使得就是，，…，中的最大值，只需,,

由，

故是，，…，中的最大值.

法二:

∵, ∴最小时，最大，

∵, ∴，

∴时，最小，

故是，，…，中的最大值.