**数列的概念与简单表示法解题方法与技巧-高中数学必修5第二章**

典题导入

[例1]　(2012·天津南开中学月考)下列公式可作为数列{*an*}：1,2,1,2,1,2，…的通项公式的是(　　)

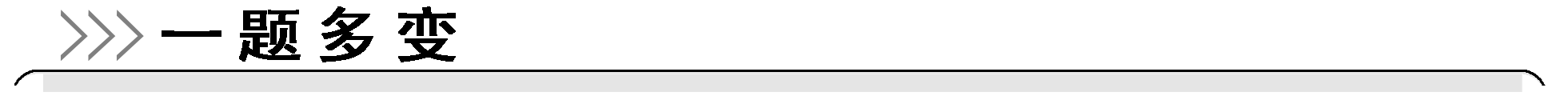
A．*an*＝1　　　　　　　　　 B．*an*＝

C．*an*＝2－ D．*an*＝

[自主解答]　由*an*＝2－可得*a*1＝1，*a*2＝2，

*a*3＝1，*a*4＝2，….

[答案]　C



若本例中数列变为：0,1,0,1，…，则{*an*}的一个通项公式为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

*an*＝

由题悟法

1．根据数列的前几项求它的一个通项公式，要注意观察每一项的特点，观察出项与*n*之间的关系、规律，可使用添项、通分、分割等办法，转化为一些常见数列的通项公式来求．对于正负符号变化，可用(－1)*n*或(－1)*n*＋1来调整．

2．根据数列的前几项写出数列的一个通项公式是不完全归纳法，它蕴含着“从特殊到一般”的思想．

以题试法

1．写出下面数列的一个通项公式．

(1)3,5,7,9，…；

(2)，，，，，…；

(3)3,33,333,3 333，…；

(4)－1，，－，，－，，….

解：(1)各项减去1后为正偶数，所以*an*＝2*n*＋1.

(2)每一项的分子比分母少1，而分母组成数列21,22,23,24，…，所以*an*＝.

(3)将数列各项改写为，，，，…，分母都是3，而分子分别是10－1,102－1,103－1,104－1，….

所以*an*＝(10*n*－1)．

(4)奇数项为负，偶数项为正，故通项公式的符号为(－1)*n*；各项绝对值的分母组成数列1,2,3,4，…；而各项绝对值的分子组成的数列中，奇数项为1，偶数项为3，即奇数项为2－1，偶数项为2＋1，

所以*an*＝(－1)*n*·，也可写为

*an*＝

典题导入

[例2]　已知数列{*an*}的前*n*项和*Sn*，根据下列条件分别求它们的通项*an*.

(1)*Sn*＝2*n*2＋3*n*；(2)*Sn*＝3*n*＋1.

[自主解答]　(1)由题可知，当*n*＝1时，*a*1＝*S*1＝2×12＋3×1＝5，

当*n*≥2时，*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝(2*n*2＋3*n*)－[2(*n*－1)2＋3(*n*－1)]＝4*n*＋1.

当*n*＝1时，4×1＋1＝5＝*a*1，故*an*＝4*n*＋1.

(2)当*n*＝1时，*a*1＝*S*1＝3＋1＝4，

当*n*≥2时，

*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝(3*n*＋1)－(3*n*－1＋1)＝2×3*n*－1.

当*n*＝1时，2×31－1＝2≠*a*1，

故*an*＝

由题悟法

已知数列{*an*}的前*n*项和*Sn*，求数列的通项公式，其求解过程分为三步：

(1)先利用*a*1＝*S*1求出*a*1；

(2)用*n*－1替换*Sn*中的*n*得到一个新的关系，利用*an*＝*Sn*－*Sn*－1(*n*≥2)便可求出当*n*≥2时*an*的表达式；

(3)对*n*＝1时的结果进行检验，看是否符合*n*≥2时*an*的表达式，如果符合，则可以把数列的通项公式合写；如果不符合，则应该分*n*＝1与*n*≥2两段来写．

以题试法

2．(2012·聊城模拟)已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，且*Sn*＝，则＝(　　)

A.　　　　　　　　　　　　　 B.

C. D．30

解析：选D　当*n*≥2时，*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝－＝，则*a*5＝＝.

典题导入

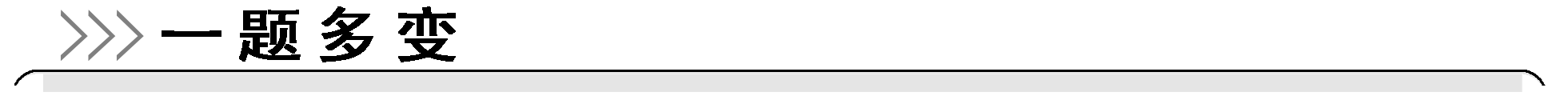
[例3]　已知数列{*an*}的通项公式为*an*＝*n*2－21*n*＋20.

(1)*n*为何值时，*an*有最小值？并求出最小值；

(2)*n*为何值时，该数列的前*n*项和最小？

[自主解答]　(1)因为*an*＝*n*2－21*n*＋20＝2－，可知对称轴方程为*n*＝＝10.5.又因*n*∈**N**\*，故*n*＝10或*n*＝11时，*an*有最小值，其最小值为112－21×11＋20＝－90.

(2)设数列的前*n*项和最小，则有*an*≤0，由*n*2－21*n*＋20≤0，解得1≤*n*≤20，故数列{*an*}从第21项开始为正数，所以该数列的前19或20项和最小．



在本例条件下，设*bn*＝，则*n*为何值时，*bn*取得最小值？并求出最小值．

解：*bn*＝＝＝*n*＋－21，

令*f*(*x*)＝*x*＋－21(*x*>0)，则*f*′(*x*)＝1－，由*f*′(*x*)＝0解得*x*＝2或*x*＝－2(舍)．而4<2<5，故当*n*≤4时，数列{*bn*}单调递减；当*n*≥5时，数列{*bn*}单调递增．而*b*4＝4＋－21＝－12，*b*5＝5＋－21＝－12，所以当*n*＝4或*n*＝5时，*bn*取得最小值，最小值为－12.



由题悟法

1．数列中项的最值的求法

根据数列与函数之间的对应关系，构造相应的函数*an*＝*f*(*n*)，利用求解函数最值的方法求解，但要注意自变量的取值．

2．前*n*项和最值的求法

(1)先求出数列的前*n*项和*Sn*，根据*Sn*的表达式求解最值；

(2)根据数列的通项公式，若*am*≥0，且*am*＋1<0，则*Sm*最大；若*am*≤0，且*am*＋1>0，则*Sm*最小，这样便可直接利用各项的符号确定最值.

以题试法

3．(2012·江西七校联考)数列{*an*}的通项*an*＝，则数列{*an*}中的最大值是(　　)

A．3 B．19

C. D.

解析：选C　*an*＝，由基本不等式得，≤，由于*n*∈**N**\*，易知当*n*＝9或10时，*an*＝最大．



1．已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，且*Sn*＝2(*an*－1)，则*a*2等于(　　)

A．4　　　　　　　　　　　 B．2

C．1 D．－2

解析：选A　由题可知*Sn*＝2(*an*－1)，

所以*S*1＝*a*1＝2(*a*1－1)，解得*a*1＝2.

又*S*2＝*a*1＋*a*2＝2(*a*2－1)，解得*a*2＝*a*1＋2＝4.

2．按数列的排列规律猜想数列，－，，－，…的第10项是(　　)

A．－ B．－

C．－ D．－

解析：选C　所给数列呈现分数形式，且正负相间，求通项公式时，我们可以把每一部分进行分解：符号、分母、分子．很容易归纳出数列{*an*}的通项公式，*an*＝(－1)*n*＋1，故*a*10＝－.

3．数列{*an*}的前*n*项积为*n*2，那么当*n*≥2时，*an*＝(　　)

A．2*n*－1 B．*n*2

C. D.

解析：选D　设数列{*an*}的前*n*项积为*Tn*，则*Tn*＝*n*2，

当*n*≥2时，*an*＝＝.

4．已知数列{*an*}满足*a*1>0，＝，则数列{*an*}是(　　)

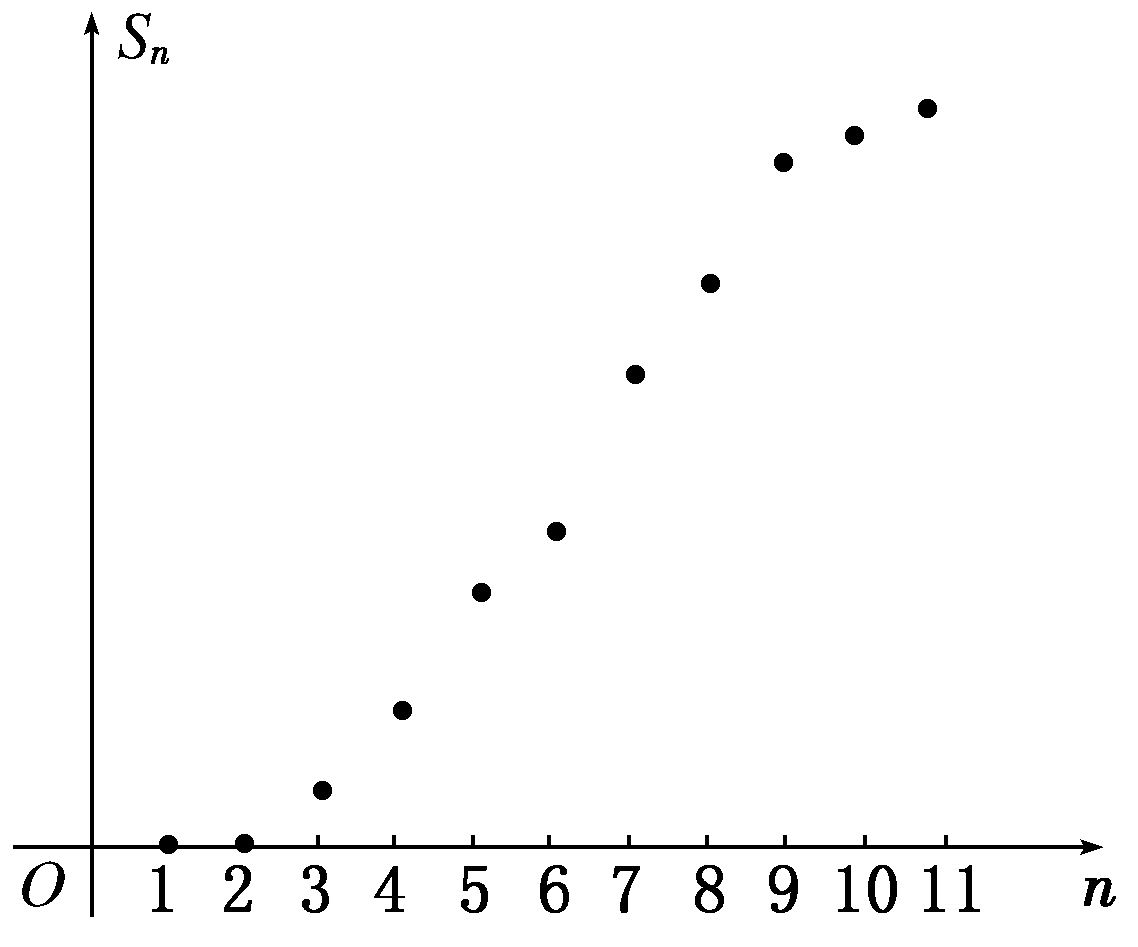
A．递增数列 B．递减数列

C．常数列 D．不确定

解析：选B　∵＝<1.又*a*1>0，则*an*>0，

∴*an*＋1<*an*.∴{*an*}是递减数列．

5．(2012·北京高考)某棵果树前*n*年的总产量*Sn*与*n*之间的关系如图所示．从目前记录的结果看，前*m*年的年平均产量最高，*m*的值为(　　)

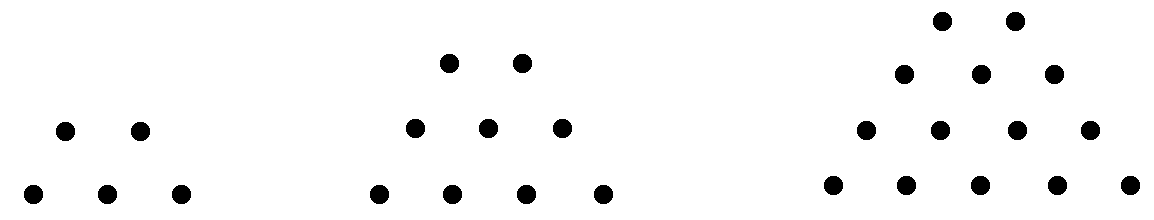


A．5 B．7

C．9 D．11

解析：选C　依题意表示图象上的点(*n*，*Sn*)与原点连线的斜率，由图象可知，当*n*＝9时，最大，故*m*＝9.

6．(2013·江西八校联考)将石子摆成如图的梯形形状．称数列5,9,14,20，…为“梯形数”．根据图形的构成，此数列的第2 012项与5的差，即*a*2 012－5＝(　　)



A．2 018×2 012 B．2 018×2 011

C．1 009×2 012 D．1 009×2 011

解析：选D　因为*an*－*an*－1＝*n*＋2(*n*≥2)，所以*an*＝5＋，所以*a*2 012－5＝1 009×2 011.

7．已知数列{*an*}满足*ast*＝*asat*(*s*，*t*∈**N**\*)，且*a*2＝2，则*a*8＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析：令*s*＝*t*＝2，则*a*4＝*a*2×*a*2＝4，

令*s*＝2，*t*＝4，则*a*8＝*a*2×*a*4＝8.

答案：8

8．已知数列{*an*}满足*a*1＝1，*a*2＝2，且*an*＝(*n*≥3)，则*a*2 012＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析：将*a*1＝1，*a*2＝2代入*an*＝得*a*3＝＝2，同理可得*a*4＝1，*a*5＝，*a*6＝，*a*7＝1，*a*8＝2，故数列{*an*}是周期数列，周期为6，故*a*2 012＝*a*335×6＋2＝*a*2＝2.

答案：2

9．已知{*an*}的前*n*项和为*Sn*，且满足log2(*Sn*＋1)＝*n*＋1，则*an*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析：由已知条件可得*Sn*＋1＝2*n*＋1.

则*Sn*＝2*n*＋1－1，当*n*＝1时，*a*1＝*S*1＝3，

当*n*≥2时，*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝2*n*＋1－1－2*n*＋1＝2*n*，*n*＝1时不适合*an*，故*an*＝

答案：

10．数列{*an*}的通项公式是*an*＝*n*2－7*n*＋6.

(1)这个数列的第4项是多少？

(2)150是不是这个数列的项？若是这个数列的项，它是第几项？

(3)该数列从第几项开始各项都是正数？

解：(1)当*n*＝4时，*a*4＝42－4×7＋6＝－6.

(2)令*an*＝150，即*n*2－7*n*＋6＝150，

解得*n*＝16或*n*＝－9(舍去)，

即150是这个数列的第16项．

(3)令*an*＝*n*2－7*n*＋6>0，解得*n*>6或*n*<1(舍)．

故从第7项起各项都是正数．

11．已知数列{*an*}的前*n*项和*Sn*＝2*n*2＋2*n*，数列{*bn*}的前*n*项和*Tn*＝2－*bn*.求数列{*an*}与{*bn*}的通项公式．

解：∵当*n*≥2时，*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝(2*n*2＋2*n*)－[2(*n*－1)2＋2(*n*－1)]＝4*n*，

当*n*＝1时，*a*1＝*S*1＝4也适合，

∴{*an*}的通项公式是*an*＝4*n*(*n*∈**N**\*)．

∵*Tn*＝2－*bn*，

∴当*n*＝1时，*b*1＝2－*b*1，*b*1＝1.

当*n*≥2时，*bn*＝*Tn*－*Tn*－1＝(2－*bn*)－(2－*bn*－1)，

∴2*bn*＝*bn*－1.

∴数列{*bn*}是公比为，首项为1的等比数列．

∴*bn*＝*n*－1.

12．(2012·福州质检)数列{*an*}中，已知*a*1＝2，*an*＋1＝*an*＋*cn*(*n*∈**N**\*，常数*c*≠0)，且*a*1，*a*2，*a*3成等比数列．

(1)求*c*的值；

(2)求数列{*an*}的通项公式．

解：(1)由题知，*a*1＝2，*a*2＝2＋*c*，*a*3＝2＋3*c*，

因为*a*1，*a*2，*a*3成等比数列，所以(2＋*c*)2＝2(2＋3*c*)，

解得*c*＝0或*c*＝2，又*c*≠0，故*c*＝2.

(2)当*n*≥2时，由*an*＋1＝*an*＋*cn*得

*a*2－*a*1＝*c*，

*a*3－*a*2＝2*c*，

…

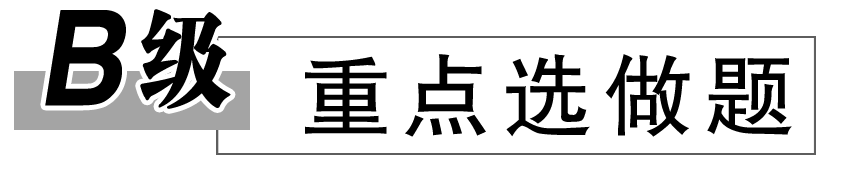
*an*－*an*－1＝(*n*－1)*c*，

以上各式相加，得*an*－*a*1＝[1＋2＋…＋(*n*－1)]*c*＝*c*，

又*a*1＝2，*c*＝2，故*an*＝*n*2－*n*＋2(*n*≥2)，

当*n*＝1时，上式也成立，

所以数列{*an*}的通项公式为*an*＝*n*2－*n*＋2(*n*∈**N**\*)．



1．(2013·嘉兴质检)已知数列{*an*}满足*a*1＝1，*an*＋1*an*＝2*n*(*n*∈**N**\*)，则*a*10＝(　　)

A．64　　　　　　　　　　　　　 B．32

C．16 D．8

解析：选B　因为*an*＋1*an*＝2*n*，所以*an*＋1*an*＋2＝2*n*＋1，两式相除得＝2.又*a*1*a*2＝2，*a*1＝1，所以*a*2＝2，

则···＝24，即*a*10＝25.

2．数列{*an*}中，*Sn*为{*an*}的前*n*项和，*n*(*an*＋1－*an*)＝*an*(*n*∈**N**\*)，且*a*3＝π，则tan *S*4等于(　　)

A．－ B.

C．－ D.

解析：选B　法一：由*n*(*an*＋1－*an*)＝*an*得

*nan*＋1＝(*n*＋1)*an*，

可得3*a*4＝4*a*3，已知*a*3＝π，则*a*4＝π.

又由2*a*3＝3*a*2，得*a*2＝π，

由*a*2＝2*a*1，得*a*1＝，故*S*4＝*a*1＋*a*2＋*a*3＋*a*4＝π，

tan *S*4＝tanπ＝.

法二：∵由*n*(*an*＋1－*an*)＝*an*，

得*nan*＋1＝(*n*＋1)*an*即＝，

∴＝＝＝…＝＝.

∴*an*＝*n*，

∴*S*4＝*a*1＋*a*2＋*a*3＋*a*4＝(1＋2＋3＋4)＝π，tan *S*4＝tanπ＝.

3．(2012·甘肃模拟)已知数列{*an*}中，*a*1＝1，且满足递推关系*an*＋1＝(*n*∈**N**\*)．

(1)当*m*＝1时，求数列{*an*}的通项公式*an*；

(2)当*n*∈**N**\*时，数列{*an*}满足不等式*an*＋1≥*an*恒成立，求*m*的取值范围．

解：(1)∵*m*＝1，由*an*＋1＝(*n*∈**N**\*)，得

*an*＋1＝＝2*an*＋1，

∴*an*＋1＋1＝2(*an*＋1)，

∴数列{*an*＋1}是以2为首项，公比也是2的等比数列．

于是*an*＋1＝2·2*n*－1，∴*an*＝2*n*－1.

(2)∵*an*＋1≥*an*，而*a*1＝1，知*an*≥1，

∴≥*an*，即*m*≥－*a*－2*an*，

依题意，有*m*≥－(*an*＋1)2＋1恒成立．

∵*an*≥1，∴*m*≥－22＋1＝－3，即满足题意的*m*的取值范围是[－3，＋∞)．



1．下列说法中，正确的是(　　)

A．数列1,3,5,7可表示为{1,3,5,7}

B．数列1,0，－1，－2与数列－2，－1,0,1是相同的数列

C．数列的第*k*项为1＋

D．数列0,2,4,6,8，…可记为{2*n*}

解析：选C　∵数列的通项公式为*an*＝＝1＋，∴*ak*＝1＋.故C正确；由数列的定义可知A、B均错；D应记作{2(*n*－1)}．

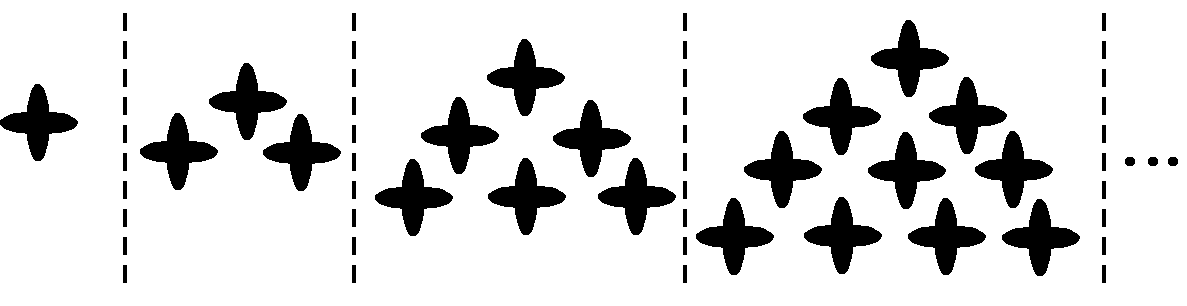
2．数列{*an*}满足*an*＋*an*＋1＝(*n*∈**N**\*)，*a*2＝2，*Sn*是数列{*an*}的前*n*项和，则*S*21为(　　)

A．5 B.

C. D.

解析：选B　*a*1＝－*a*2＝－2，*a*2＝2，*a*3＝－2，*a*4＝2，…，知*a*2*n*＝2，*a*2*n*－1＝－2，故*S*21＝10×＋*a*1＝5＋－2＝.

3．如图关于星星的图案中，第*n*个图案中星星的个数为*an*，则数列{*an*}的一个通项公式是(　　)



A．*an*＝*n*2－*n*＋1 B．*an*＝

C．*an*＝ D．*an*＝

解析：选C　从图中可观察星星的构成规律，*n*＝1时，有1个；*n*＝2时，有3个；*n*＝3时，有6个；*n*＝4时，有10个，…

故*an*＝1＋2＋3＋4＋…＋*n*＝.

4．已知数列{*an*}中，*a*1＝3，*an*＋1＝，则其通项公式为\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：两边取倒数，得＝＝2＋，故有－＝2.故数列是首项为＝，公差为2的等差数列，所以＝＋2(*n*－1)＝，故*an*＝.

答案：

5．已知数列{*an*}满足：*a*1＝1，(*n*－1)*an*＝*n*×2*nan*－1(*n*∈**N**，*n*≥2)，则数列{*an*}的通项公式为\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：当*n*≥2，有(*n*－1)*an*＝*n*×2*nan*－1，故＝×2*n*，则有＝×2*n*－1，＝×2*n*－2，…，＝×22.上述*n*－1个式子累乘，得＝×××…×＝*n*×2*n*＋(*n*－1)＋(*n*－2)＋…＋2＝*n*×2.又因为*a*1＝1，所以*an*＝*n*×2，而当*n*＝1时，*a*1＝1×20＝1，也满足上式，故数列{*an*}的通项公式为*an*＝*n*×2.

答案：*an*＝*n*×2