**平面向量的数量积解题方法与技巧-高中数学必修4第二章**

平面向量数量积运算一直是高考热点内容，它在处理线段长度、垂直等问题的方式方法上尤为有突出的表现,而正确理解数量积的定义和几何意义是求解的关键，同时平面向量数量积的运算结果是实数而不是向量,因此要注意数量积运算和实数运算律的差异,本文仅举数例谈谈求解向量数量积运算的方法和策略。

1.利用数量积运算公式求解

在数量积运算律中，有两个形似实数的完全平方和(差)公式在解题中的应用较为广泛,即(*a*＋*b*)２＝*a*２＋２*a*·*b*＋*b*２，（*a*－*b*）２＝*a*２－２*a*·*b*＋*b*２

上述两公式以及(*a*＋*b*)(*a*－*b*)＝*a*２－*b*２这一类似于实数平方差的公式在解题过程中可以直接应用.

例1 已知｜*a*｜＝２，｜*b*｜＝５，*a*·*b*＝－３，求｜*a*＋*b*｜，｜*a*－*b*｜.

解析：∵｜*a*＋*b*｜２＝（*a*＋*b*）２＝*a*２＋２*a*·*b*＋*b*２＝２２＋２×（－３）＋５２＝２３

∴｜*a*＋*b*｜＝，∵（｜*a*－*b*｜）２＝（*a*－*b*）２＝*a*２－2*a*·*b*＋*b*２＝2２－2×（－3）×５２＝35，

∴｜*a*－*b*｜＝．

例2 已知｜*a*｜＝8，｜*b*｜＝10，｜*a*＋*b*｜＝16，求*a*与*b*的夹角*θ*(精确到１°).

解析：∵（｜*a*＋*b*｜）２＝（*a*＋*b*）２＝*a*２＋2*a*·*b*＋*b*２＝｜*a*｜２＋2｜*a*｜·｜*b*｜ｃｏｓ*θ*＋｜*b*｜２

∴１６２＝８２＋２×８×１０ｃｏｓ*θ*＋１０２，

∴ｃｏｓ*θ*＝，∴*θ*≈５５°

例3 已知*a*＝（3，4），*b*＝（4，3），求*x*,*y*的值使(*xa*+*yb*)⊥*a*，且｜*xa*+*yb*｜=1.

分析：这里两个条件互相制约，注意体现方程组思想.

解：由*a*＝（3，4），*b*＝（4，3），有*xa*+*yb*=(3*x*+4*y*,4*x*+3*y*)

又（*xa*+*yb*）⊥*a*(*xa*+*yb*)·*a*＝０3(3*x*+4*y*)+4(4*x*+3*y*)=0

即25*x*+24*y*＝０ ①

又｜*xa*+*yb*｜=1｜*xa*+*yb*｜２＝１（３*x*+4*y*）２＋（４*x*+3*y*）２＝１

整理得：25*x*２＋48*xy*+25*y*２＝１即*x*(25*x*+24*y*)+24*xy*+25*y*２＝１ ②

由①②有24*xy*+25*y*２＝１ ③

将①变形代入③可得：*y*=±

再代回①得：

2. 利用定义直接求解.

例4 若向量满足，的夹角为45°，则=\_\_\_\_\_\_.

解析：根据数量积的定义得，

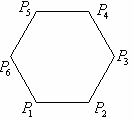
例5 设向量与向量的夹角为钝角，求实数t的取值范围.

解析：∵，故，

解之 ．

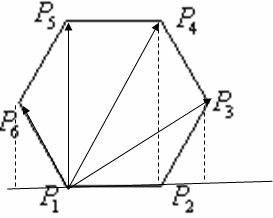
另有，解之，

∴．

例6 如图, 已知正六边形，下列向量的数量积中最大的是（ ）

（A） （B）

（C） （D）

解析：选项中均有向量，根据数量积的几何意义，要找的最大值,只需求在方向上的投影最大即可，画图可知只有在方向上的投影最大，故最大选A.

3. 利用数量积的定义、性质、运算律求解

例7 判断正误，并简要说明理由.

①*ａ*·0＝0；②0·*ａ*＝０；③0－**＝**；④｜*ａ*·*ｂ*｜＝｜*ａ*｜｜*ｂ*｜；⑤若*ａ*≠0，则对任一非零*ｂ*有*ａ*·*ｂ*≠０；⑥*ａ*·*ｂ*＝０，则*ａ*与*ｂ*中至少有一个为0；⑦对任意向量*ａ*，*ｂ*，*с*都有（*ａ*·*ｂ*）*с*＝*ａ*（*ｂ*·*с*）；⑧*ａ*与*ｂ*是两个单位向量，则*ａ*２＝*ｂ*２.

分析：根据数量积的定义、性质、运算律，逐一判断.

解：上述8个命题中只有③⑧正确；

对于①：两个向量的数量积是一个实数，应有0·*ａ*＝０；

对于②：应有０·*ａ*＝0；

对于④：由数量积定义有｜*ａ*·*ｂ*｜＝｜*ａ*｜·｜*ｂ*｜·｜ｃｏｓ*θ*｜≤｜*ａ*｜｜*ｂ*｜，这里*θ*是*ａ*与*ｂ*的夹角，只有*θ*＝０或*θ*＝*π*时，才有｜*ａ*·*ｂ*｜＝｜*ａ*｜·｜*ｂ*｜；

对于⑤：若非零向量*ａ*、*ｂ*垂直，有*ａ*·*ｂ*＝０；

对于⑥：由*ａ*·*ｂ*＝０可知*ａ*⊥*ｂ*可以都非零；

对于⑦：若*ａ*与*с*共线，记*ａ*＝*λс*.

则*ａ*·*ｂ*＝（*λс*）·*ｂ*＝*λ*（*с*·*ｂ*）＝*λ*（*ｂ*·*с*），

∴（*ａ*·*ｂ*）·*с*＝*λ*（*ｂ*·*с*）*с*＝（*ｂ*·*с*）*λс*＝（*ｂ*·*с*）*ａ*

若*ａ*与*с*不共线，则(*ａ*·*ｂ*)*с*≠（*ｂ*·*с*）*ａ*.

评述：这一类型题，要求学生确实把握好数量积的定义、性质、运算律.

4. 借助零向量. 即借助“围成一个封闭图形且首尾相接的向量的和为零向量”，再合理使用向量的移项以及平方等变形，求解数量积.

例8 已知△ABC中，，若，求证：△ABC

为正三角形.

证明：， ∴， 又∵， ，

故 ， 知*a*=b， 同理可知b=c ， 故*a*=b=c ， 得证．

例9 已知平面上三点A、B、C满足则的值等于 。

解析：注意到∵，两边平方得

所以=−25

5. 借助平行向量与垂直向量.即借助向量的拆分，将待求的数量积转化为有垂直条件关系或平行向量关系的向量数量积，借助，则等解决问题.

例10 已知向量*a*＝（3，－4），*b*＝（2，*x*）， *c*＝（2，*y*）且*a*∥*b*，*a**c*．求|*b*－*c*|的值．

解析：∵ *a*∥*b*，∴ 3*x*＋8＝0． ∴*x*＝． ∴ *b*＝（2， ） ．

∵ *a**c*， ∴ 6－4*y*＝0． ∴ *y*＝． ∴ *c*＝（2， ）．

而*b*－*c* ＝（2，）－（2，）＝（0，－），

∴ |*b*－*c*|＝．

例11 如图，在Rt△ABC中，已知BC=a，若长为2a的线段PQ以点A为中心，问与的夹角θ取何值时·的值最大？，并求出这个最大值.

解析：∵⊥∴·=0又∵=－，=－,=－,

∴·=(－)·(－)=·－·－·+·

=－a2－·+·=－a2+(－)=－a2+·.

∴当cosθ=1,，即θ=0（与方向相同）时，·最大，最大值为0.

例12 四边形中，

（1）若，试求与满足的关系式；

（2）满足（1）的同时又有，求的值及四边形的面积。

解析：



（1） 则有 化简得：

（2）, 

又 则 

化简有：

联立

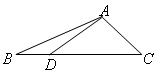
解得 或

  则四边形为对角线互相垂直的梯形

当时, 此时

当时,  此时

6. 借助向量的拆分将待求向量的数量积转化为题目中能求解的数量积.

例13 如图，在中，，是边上一点，，则\_\_\_\_\_\_\_ .

解析：直接利用定义求较困难，题目中给出了，可以利用定义直接求出，这样问题就转化为能否将向量都用形式表示.由得即，

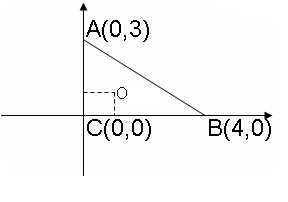
∴.

7. 建立坐标系，利用坐标运算求解数量积

例14 已知O为Rt△ABC的内切圆的圆心，AB=5,BC=4,CA=3下列结论正确的是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

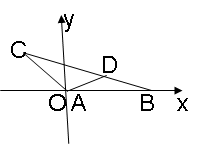
解析：建立如图直角坐标系：设A(0,3)，B(4,0)，C(0,0)，

∵O为Rt△ABC的内切圆的圆心∴O(1,1)，

∴，，

∴，，故选 A

例15 如图，在中，，是边上一点，，则\_\_\_\_\_\_\_.

解析：建立以AB为x轴，过点A作AB的垂线为y轴的直角坐标系，如图所示，则A(0,0)，B(2,0)，C()，由定比分点坐标公式得D()，所以，=(),

即.