三角函数的诱导公式-高中数学必修4第一章

[同角三角函数的基本关系式](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_1)

1. [同角三角函数关系六角形记忆法](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_2)
2. [两角和差公式](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_3)
3. [二倍角的正弦、余弦和正切公式](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_4)
4. [半角的正弦、余弦和正切公式](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_5)
5. [万能公式](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_6)
6. [三倍角的正弦、余弦和正切公式](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_7)
7. [三角函数的和差化积公式](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_8)
8. [三角函数的积化和差公式](http://baike.baidu.com/view/1534383.htm" \l "3_9)

**一、同角三角函数的基本关系式**

**（一）基本关系**

1、倒数关系

　　 tanα ·cotα=1 sinα ·cscα=1 cosα ·secα=1

　　2、商的关系

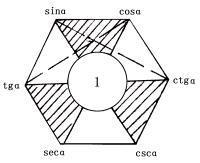
sinα/cosα=tanα secα/cscα=tanα

cosα/sinα=cotα cscα/secα=cotα

　　3、平方关系

sin2α+cos2α=1 1+tan2α=sec2α 1+cot2α=csc2α

**（二）同角三角函数关系六角形记忆法**

[](http://baike.baidu.com/albums/1534383/1534383.html#0$148f28d32744e5133af3cfb6)

　　构造以"上弦、中切、下割；左正、右余、中间1"的正六边形为模型。

**1、倒数关系**

　　对角线上两个函数互为倒数；

**2、商数关系**

　　 六边形任意一顶点上的函数值等于与它相邻的两个顶点上函数值的乘积。（主要是两条虚线两端的三角函数值的乘积，下面4个也存在这种关系。）。由此，可得商数关系式。

**3、平方关系**

　　 在带有阴影线的三角形中，上面两个顶点上的三角函数值的平方和等于下面顶点上的三角函数值的平方。

**二、诱导公式的本质**

　　所谓三角函数诱导公式，就是将角n·(π/2)±α的三角函数转化为角α的三角函数。

**（一）常用的诱导公式**

**1、公式一： 设α为任意角，终边相同的角的同一三角函数的值相等**：

　　 sin（2kπ+α）=sinα， k∈z cos（2kπ+α）=cosα， k∈z

　　 tan（2kπ+α）=tanα， k∈z cot（2kπ+α）=cotα， k∈z

　　 sec（2kπ+α）=secα， k∈z csc（2kπ+α）=cscα， k∈z

**2、公式二：α为任意角，π+α的三角函数值与α的三角函数值之间的关系**：

　　 sin（π+α）=－sinα cos（π+α）=－cosα

　　 tan（π+α）= tanα cot（π+α）= cotα

　 　sec (π+α) =—secα csc (π+α) =—cscα

**3、公式三：任意角α与 -α的三角函数值之间的关系：**

　　 sin（－α）=－sinα cos（－α）= cosα

　　 tan（－α）=－tanα cot（－α）=－cotα

　　 sec (—α) = secα csc (—α) =—cscα

**4、公式四：利用公式二和公式三可以得到π-α与α的三角函数值之间的关系：**

　 　sin（π－α）= sinα cos（π－α）=－cosα

　　 tan（π－α）=－tanα cot（π－α）=－cotα

　　 sec (π—α) =—secα csc (π—α) = cscα

**5、公式五：利用公式一和公式三可以得2π-α与α的三角函数值之间的关系：**

　　 sin（2π－α）=－sinα cos（2π－α）= cosα

　　 tan（2π－α）=－tanα cot（2π－α）=－cotα

　　 sec (2π—α) = secα 　csc (2π—α) =—cscα

**6、公式六：+α与α的三角函数值之间的关系：**

　　 sin（+α）= cosα cos（+α）=－sinα

　　 tan（+α）=－cotα cot（+α）=－tanα

　　 sec (+α) =—cscα csc (+α) = secα

**7、公式七：****-α与α的三角函数值之间的关系：**

　　 sin（－α）= cosα cos（－α）= sinα

　 　tan（－α）= cotα cot（－α）= tanα

　　 sec (—α) = cscα csc (—α) = secα

**8、推算公式：****+α与α的三角函数值之间的关系：**

　　 sin（+α）=－cosα cos（+α）= sinα

　　 tan（+α）=－cotα cot（+α）=－tanα

　　 sec (+α) = cscα csc (+α) =—secα

**9、推算公式：****—α与α的三角函数值之间的关系：**

　 　sin（－α）=－cosα 　cos（－α）=－sinα

　　 tan（－α）= cotα cot（－α）= tanα

　 　sec（-α) =—cscα csc（—α) =—secα

**诱导公式记忆口诀：“奇变偶不变，符号看象限”。**

　　“奇、偶”指的是****的倍数的奇偶，“变与不变”指的是三角函数的名称的变化：“变”是指正弦变余弦，正切变余切。（反之亦然成立）“符号看象限”的含义是：把角α看做锐角，不考虑α角所在象限，看n·(π/2)±α是第几象限角，从而得到等式右边是正号还是负号。

**符号判断口诀：**

**“一全正；二正弦；三两切；四余弦”。**

这十二字口诀的意思就是说：

**第一象限**内任何一个角的四种三角函数值都是“+”；

**第二象限**内只有正弦是“+”，其余全部是“－”；

**第三象限**内只有正切和余切是“+”，其余全部是“－”；

**第四象限**内只有余弦是“+”，其余全部是“－”。

　　“ASCT”意即为“all(全部)”、“sin”、“tan”、“cos”

**（二）其他三角函数知识**

**1、两角和差公式**

　　 sin（α+ β）= sinαcosβ+ cosαsinβ

　　 sin（α－β）= sinαcosβ－cosαsinβ

　　 cos（α+ β）= cosαcosβ－sinαsinβ

　　 cos（α－β）= cosαcosβ+ sinαsinβ

　 　tan（α+ β）=(tanα+tanβ )/(1－tanα·tanβ)

　　 tan（α－β）=(tanα－tanβ)/(1+tanα·tanβ)

**2、二倍角的正弦、余弦和正切公式**

　　 sin2α=2sinαcosα

　 　cos2α=cos2α－sin2α=2cos2α－1=1－2sin2α

　　 tan2α=

**3、半角的正弦、余弦和正切公式**

　 　sin2= cos2=

　　 tan2= tan==

**4、万能公式**

　 　sinα= cosα= tanα=

**5、三倍角的正弦、余弦和正切公式**

　　 sin3α=3sinα－4sin3α cos3α=4cos3α－3cosα

　　 tan3α=

**6、三角函数的和差化积公式**

　 　sinα+sinβ=2sin·cos sinα－sinβ= 2cos·sin

　 　cosα+cosβ= 2cos·cos cosα－cosβ=－2sin·sin

**7、三角函数的积化和差公式**

　　 sinα·cosβ=[sin(α+β)+sin(α－β)]

　 　cosα·sinβ= [sin(α+β)－sin(α－β)]

　 　cosα·cosβ= [cos(α+β)+cos(α－β)]

　 　sinα·sinβ=－ [cos(α+β)－cos(α－β)]

**三、公式推导过程**

**（一）万能公式推导**

　　sin2α=2sinαcosα=  （因为cos2α+sin2α=1）

　　再把上面的分式上下同除cos2α，可得sin2α= 然后用代替α即可。

　　同理可推导余弦的万能公式。正切的万能公式可通过正弦比余弦得到。

**（二）三倍角公式推导**

tan3α===

　　上下同除以cos3α，得：

　　tan3α=

sin3α=sin(2α+α)

=sin2αcosα+cos2αsinα

　 =2sinαcos2α+(1－2sin2α)sinα

　　 =2sinα－2sin3α+sinα－2sin3α

　　 =3sinα－4sin3α

cos3α=cos(2α+α)

=cos2αcosα－sin2αsinα

　　 =(2cos2α－1)cosα－2cosαsin2α

　　 =2cos3α－cosα+(2cosα－2cos3α)

　　 =4cos3α－3cosα

　　即 sin3α=3sinα－4sin3α

　　 cos3α=4cos3α－3cosα

**（三）和差化积公式推导**

首先,我们知道sin(α+β)=sinαcosβ+cosαsinβ,

sin(α-β)=sinαcosβ-cosαsinβ

　　我们把两式相加就得到sin(α+β)+sin(α-β)=2sinαcosβ

　　所以,sinαcosβ=

　　同理,若把两式相减,就得到cosαsinβ=

同样的,我们还知道cos(α+β)=cosαcosβ-sinαsinβ,

cos(α-β)=cosαcosβ+sinαsinβ

　　所以,把两式相加,我们就可以得到cos(α+β)+cos(α-β)=2cosαcosβ

　　 所以我们就得到,cosαcosβ=

同理,两式相减我们就得到sinαsinβ= —

这样,我们就得到了积化和差的四个公式:

　　sinαcosβ=

　　cosαsinβ=

　　cosαcosβ= 

　　sinαsinβ=**-**

　　好,有了积化和差的四个公式以后,我们只需一个变形,就可以得到和差化积的四个公式.

　　我们把上述四个公式中的α+b设为x, α-β设为y,那么α=, β=

　　把α,β分别用x,y表示就可以得到和差化积的四个公式:

　　sinx+siny=2sincos

　　sinx-siny=2cossin

　　cosx+cosy=2coscos

　　cosx-cosy=—2sinsin